

Геометрія

Істер О. С., Єргіна О. В.

«Геометрія (профільний рівень)»

підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Шановні десятикласниці та десятикласники!

У попередніх класах ви вивчали планіметрію – геометрію на площині. Починаючи з 10 класу, вивчатимете геометрію у просторі. Її називають *стереометрією*.

Підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам оволодіти такою системою знань з геометрії та набутти тих компетентностей, які будуть потрібні не тільки в повсякденному житті, а й у майбутній трудовій діяльності та яких буде достатньо для продовження навчання у вищих навчальних закладах.

Для зручності матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, рубрик. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв’язування задач і вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної і домашньої робіт, проектної діяльності, графічні роботи тощо.

Вивчення геометрії потребує наполегливості, логіки мислення, просторової уяви. Тому теоретичний матеріал підручника авторський колектив намагався викласти простою, доступною мовою, проілюструвати малюнками та прикладами з повсякденного життя.

У підручнику є умовні позначення:

-  – треба запам’ятати;  – запитання до параграфів;
-  – «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв’язування інших задач);
-  – теорема;  – наслідок з теореми;
-  – доведення закінчено.

1.24 – вправа для виконання у класі;

1.25 – вправа для виконання вдома.

Усі задачі і вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

- з позначки  починаються вправи початкового рівня;
- з позначки  починаються вправи середнього рівня;
- з позначки  починаються вправи достатнього рівня;
- з позначки  починаються вправи високого рівня.

У кінці теоретичного матеріалу деяких параграфів ви знайдете завдання для  **«Графічних робіт»**, які сприятимуть розвитку просторової уяви та допоможуть навчитися правильно відтворювати умову задачі на малюнку. Рубрика  **«Розв’яжіть задачі та виконайте вправи»** містить значну кількість завдань для класної та домашньої роботи, усних вправ, завдань для проектної діяльності, що відповідають темі параграфа та допоможуть добре її опрацювати. Рубрика  **«Задачі підвищеної складності»** містить завдання для поглиблення знань з геометрії та підготовки до різноманітних математичних змагань. У рубриці  **«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»** пропонується розв’язати вправи, які допоможуть

актуалізувати знання, необхідні для вивчення наступної теми. У рубриці  **«Життєва математика»** зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, тобто усім тим, без чого неможливо уявити людину в повсякденному житті. Рубрика  **«Цікаві задачі**

для учнів неледачих» містить задачі, які зазвичай називають нестандартними, задачі математичних олімпіад різних країн світу, задачі, сформульовані видатними математиками тощо. Наприкінці кожного параграфа в рубриці **«Перевірте свою компетентність»** ви знайдете тестові завдання, завдяки яким зможете повторити геометрію, перевірити рівень своєї готовності до складання зовнішнього незалежного оцінювання.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, якщо виконаєте завдання **«Домашньої самостійної роботи»** та **«Завдання для перевірки знань»**. У кінці кожного розділу наведено вправи для його повторення.

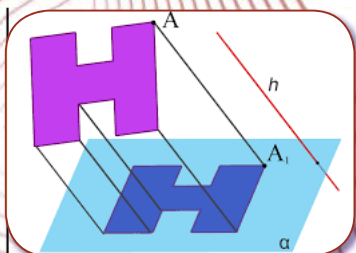
Підручник містить багато цікавих фактів з історії становлення і розвитку геометрії, життєвого шляху українських математиків, що долучилися до творення шкільного курсу геометрії та олімпіадного руху.

Шановні вчительки та вчителі!

Сподіваємося, що підручник суттєво допоможе вам в організації процесу навчання учнів геометрії. Авторський колектив намагався створити його таким, щоб він у повній мірі реалізував мету державної програми з математики, сприяв формуванню в учнів наукового світогляду, усвідомленню математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини і необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві, допоміг оволодіти системою математичних знань, навичками та уміннями, потрібними в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності, забезпечив розвиток логічного мислення, інтуїції, просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, формував життєві компетентності, загальнолюдські цінності особистості, виховував національну самосвідомість. Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, рубрики), поділу навчального матеріалу на теоретичну і практичну складові, підручник містить рубрику **«Життєва математика»**, що сприятиме реалізації наскрізних ліній програми з математики та формуватиме в учнів предметні та ключові компетентності. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності, зміст рубрик **«Цікаві задачі для учнів неледачих»** і **«Вправи підвищеної складності»** допоможуть забезпечити особистісно-орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятимуть формуванню позитивної мотивації учнів до вивчення геометрії.

У підручник включено велику кількість задач і вправ, графічні роботи, завдання для проектної діяльності, а у кінці кожного розділу розміщено додаткові вправи для повторення, систематизації та узагальнення навчального матеріалу розділу.

ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- *пригадаєте* просторові фігури (куб, прямокутний паралелепіпед, піраміду); основні поняття та аксіоми планіметрії;
- *дізнаєтеся* про аксіоматичний метод побудови геометрії, основні поняття та аксіоми стереометрії;
- *навчитися* розв'язувати нескладні задачі на побудову перерізів куба, прямокутного паралелепіпеда та піраміди.

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ. АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА НАСЛІДКИ З НИХ

1. Предмет стереометрії

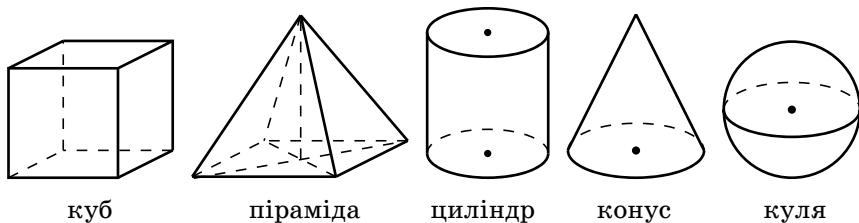
Шкільний курс геометрії складається з планіметрії і стереометрії. У курсі планіметрії 7–9 класів ви вивчали властивості плоских геометричних фігур, тобто фігур, усі точки яких лежать в одній площині (відрізок, коло, трикутник тощо).



Стереометрія – це розділ геометрії, який вивчає властивості геометричних фігур у просторі.

Термін «стереометрія» походить від грец. «стереос» – просторовий, «метрео» – міряти.

У курсі математики основної школи ви вже ознайомилися з геометричними тілами – прямокутним паралелепіпедом, кубом, пірамідою, циліндром, конусом і кулею (мал. 1.1). Предмети, що нас оточують, зазвичай повторюють форму просторових фігур або їх комбінацій. Тому геометрія, зокрема стереометрія, має і прикладне (практичне) значення. Геометричні задачі доводиться розв'язувати в архітектурі та будівництві, геодезії та машинобудуванні, інших галузях науки й техніки.



Мал. 1.1

На уроках геометрії в 10–11 класах ви значно розширите та поглибите знання про геометричні фігури в просторі.

2. Аксиоматичний метод побудови геометрії

Система вивчення курсу стереометрії, як і курсу планіметрії, ґрунтується на загальному для побудови математичної теорії аксіоматичному методі. Зокрема, *аксіоматичний метод побудови геометрії* містить такі чотири етапи.

1) *На початку вводять основні (неозначувані, ще кажуть, первісні) поняття.* Вони відповідають тим геометричним об'єктам, для яких неможливо сформулювати означення, але які легко інтуїтивно уявити. Так, наприклад, у планіметрії такими поняттями є точка, пряма і відстань. При цьому в

геометрії оперують й іншими загальними для математичної теорії поняттями, наприклад поняттям множини.

2) *Формулюють аксіоми, що описують основні властивості неозначуваних понять, тобто вводять систему аксіом.* Нагадаємо, що аксіоми – це твердження, які приймають без доведення. Вони описують неодноразово перевірені й підтверджені на практиці реальні властивості геометричних об'єктів, що відповідають неозначуваним поняттям, а тому, як правило, є інтуїтивно очевидними.

У математичній теорії система аксіом має бути: а) *несуперечливою*, тобто такою, щоб з неї в процесі доведення не можна було прийти до двох висновків, що суперечать один одному; б) *незалежною*, тобто такою, щоб жодна з аксіом побудованої системи не була логічним наслідком інших аксіом цієї системи; в) *повною*, тобто такою, щоб її було достатньо для доведення або спростування логічним шляхом будь-якого твердження про об'єкти цієї математичної теорії.

Систему аксіом разом з основними поняттями та основними залежностями між ними називають аксіоматикою.

У шкільному курсі геометрії повною мірою реалізовано тільки першу вимогу до системи аксіом – несуперечливість. Для більшої наочності і простоти доведень математичних фактів система аксіом шкільного курсу геометрії, як правило, не є незалежною і не є повною.

Повернемося до етапів аксіоматичного методу побудови геометрії.

3) *Використовуючи неозначувані поняття, визначають інші, більш складні, поняття.* Так, наприклад, використовуючи поняття точки і прямої, дають означення відрізка та променя.

4) *Використовуючи всі введені поняття та аксіоми доводять теореми.*

Усі теореми шкільного курсу геометрії (а також інших розділів математики) доводять за допомогою строгих логічних міркувань. Жодних інших властивостей геометричних фігур, крім тих, що описано в аксіомах чи доведено раніше (навіть якщо вони здаються нам очевидними), використовувати не можна.

Аксіоматичний метод використовують не лише для побудови геометричної теорії, хоча саме в геометрії цей метод було використано вперше. Його застосовано також в арифметиці, теорії ймовірностей, теорії множин тощо. На аксіоматиці ґрунтуються і деякі розділи фізики, зокрема механіка, термодинаміка, електродинаміка тощо. Спроби ж застосувати аксіоматичний метод для побудови інших наук – етики, соціології, політекономії, біології – успіху не мали.

3. Основні поняття стереометрії

Основними (неозначуваними) поняттями в стереометрії є поняття *точки, прямої і площини*.

Нагадаємо, що уявлення про точку дає, наприклад, слід на папері від дотику добре загостреного олівця, слід на дошці від дотику крейди тощо. Позначати точки, як і раніше, будемо великими латинськими літерами $A, B, C, \dots$.

Уявлення про пряму дає промінь світла, струна на гітарі, розмітка між двома смугами прямолінійної дороги тощо. Прямі можна проводити за допомогою лінійки. При цьому отримують зображення лише частини прямої, а всю пряму уявляють нескінченною в обидва боки. Позначати прямі, як і раніше, будемо малими латинськими літерами $a, b, c, d, \dots$ або двома великими латинськими літерами за назвами двох точок цієї прямої: $AB, CD, MN, \dots$.



Мал. 1.2



Мал. 1.3

Уявлення про площину дає поверхня стола, футбольне поле, віконна шибка, стеля тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою, вона не має краю та не має товщини. На малюнку площину прийнято зображати у вигляді паралелограма (мал. 1.2) або довільної замкненої області (мал. 1.3). При цьому отримують зображення лише частини площини. Позначати площини будемо малими грецькими літерами α (альфа), β (бета), γ (гама), $\dots$.

Інші поняття стереометрії вводять за допомогою *означень*.

4. Аксиоми стереометрії

Основні властивості найпростіших геометричних фігур формують за допомогою *аксіом*. Аксиоми приймають як вихідні положення. Усі аксиоми планіметрії, відомі нам з 7-го класу, справджуються і в стереометрії. Нагадаємо їх.



I. Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

II. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180° .

VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

VIII. На площині через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, паралельну даній.

Оскільки в планіметрії усі фігури лежали в одній площині, а в стереометрії вони можуть лежати в різних площинах, останню аксіому – *аксіому паралельності прямих* – для стереометрії уточнено.

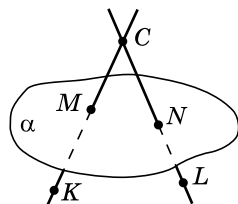
А нове поняття – *площина* – потребує ще й розширення системи аксіом, тобто доповнення стереометрії аксіомами, що описують властивості точок, прямих і площин у просторі.

Ці завдання реалізує нова група аксіом – група аксіом С.



С_I. Яка б не була площина, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

На малюнку 1.4 точки M і N належать площині α (площина α проходить через ці точки), а точки C , K і L – не належать цій площині. Для запису, як і в планіметрії, будемо використовувати символи $\in$ і $\notin$. Тому «точка M належить площині α » записуватимемо так: $M \in \alpha$, а «точка C не належить площині α » – так: $C \notin \alpha$.

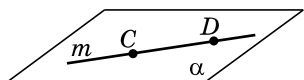


Мал. 1.4

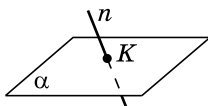


С_{II}. Якщо дві точки прямої належать площині, то всі точки прямої належать цій площині.

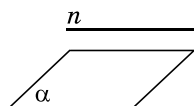
У цьому випадку кажуть, що *пряма належить площині* або *площина проходить через пряму*. На малюнку 1.5 точки C і D прямої t належать площині α , тому і пряма t , що проходить через ці точки, належить площині α . Щоб записати, що «пряма t належить площині α » будемо використовувати символ підмножини та писати так: $t \subset \alpha$. Запис $n \not\subset \alpha$ означатиме, що пряма n не належить площині α , тобто на прямій n існує точка, що площині α не належить (мал. 1.6 та 1.7). На малюнку 1.6 пряма n і площина α мають одну спільну точку K . У такому випадку кажуть, що пряма n *перетинає* площину α в точці K , а записують так: $n \cap \alpha = K$.



Мал. 1.5

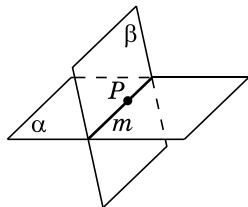


Мал. 1.6



Мал. 1.7

Аксиома C_{II} має різні практичні застосування. Одне з них – перевірка «рівності» лінійки. Для цього лінійку прикладають краєм, який перевіряють, до плоскої поверхні, наприклад стола. Якщо край лінійки рівний, то він усіма своїми точками прилягатиме до поверхні стола. Якщо ж край нерівний, то в деяких місцях між ним і поверхнею стола утвориться просвіт.



Мал. 1.8

Якщо через пряму m проходять дві різні площини α і β , то кажуть, що *площини α і β перетинаються по прямій m* (мал. 1.8), і записують так: $\alpha \cap \beta = m$.

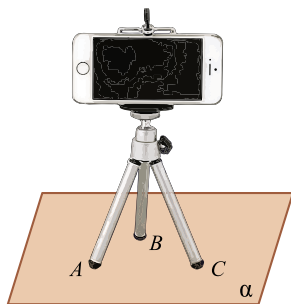


C_{III} . Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

На малюнку 1.8 площини α і β мають спільну точку P , тобто P належить як площині α , так і площині β . Аксиома C_{III} стверджує, що тоді площини α і β перетинаються по прямій m , причому точка P , в свою чергу, належатиме цій прямій m .



C_{IV} . Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.



Мал. 1.9

Практичною ілюстрацією цієї аксіоми є, наприклад, стійкість на підлозі будь-якої триноги (табурета на трьох ніжках, фотоштатива тощо). Три точки A, B, C , які є кінцями триноги, завжди можна розмістити у площині підлоги α (мал. 1.9). Тому площину α можемо називати ще площиною ABC і позначати так: (ABC) . Позначення площини трьома її точками, що не лежать на одній прямій, будемо використовувати і надалі.

Якщо ж узяти чотири довільні точки, то через них може не проходити жодна площина. Практичною ілюстрацією цього факту може стати стілець із чотирма ніжками, які не однакові за довжиною. Тоді стілець буде стояти на трьох ніжках, тобто спиратися на три «точки», а кінець четвертої ніжки (четверта «точка») не буде лежати у площині підлоги, і тому стілець буде хитатися.

5. Найпростіші наслідки з аксіом стереометрії

Сформулюємо найпростіші наслідки з аксіом стереометрії у вигляді теорем та доведемо їх.

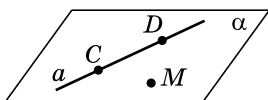


Теорема 1 (про існування і єдиність площини, що проходить через пряму і точку, що їй не належить). Через пряму і точку, що їй не належить, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Доведення. Розглянемо пряму a і точку M таку, що $M \notin a$ (мал. 1.10).

1) Позначимо на прямій a довільні точки C і D . Оскільки C, D і M не лежать на одній прямій, то через них, за аксіомою C_{IV} , можна провести площину α . Точки C і D лежать у площині α , а тому, за аксіомою C_{II} , пряма a належить площині α . Отже, площина α проходить через пряму a і точку M .

2) Доведемо, що така площина єдина. Припустимо, що через пряму a і точку M проходить ще якась площина α_1 . Але тоді ця площина має проходити і через точки C і D , що лежать на прямій a . Маємо, що через точки C, D і M , які не лежать на одній прямій, проходять дві різні площини, α і α_1 , що суперечить аксіомі C_{IV} . Отже, наше припущення хибне, а тому через пряму a і точку M , що їй не належить, проходить єдина площина α . ■

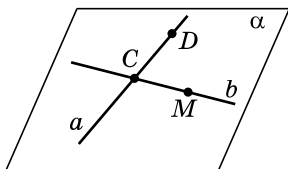


Мал. 1.10



Теорема 2 (про існування і єдиність площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються). Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Доведення. Розглянемо прямі a і b , причому $a \cap b = C$ (мал. 1.11). Позначимо на прямій b точку M , а на прямій a – точку D , обидві відмінні від точки C . Маємо три точки M, C і D , які не лежать на одній прямій, а тому далі доведення аналогічне до доведення попередньої теореми. Пропонуємо завершити його самостійно. ■



Мал. 1.11

З аксіом C_{IV} та теорем 1 і 2 приходимо до висновку, що площину можна задавати:

- 1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;
- 2) прямою і точкою, що їй не належить;
- 3) двома прямими, що перетинаються.

Ще один спосіб задання площини розглянемо згодом.



Задача 1. Довести, що через три точки, які лежать на одній прямій, можна провести площину. Скільки існує таких площин?

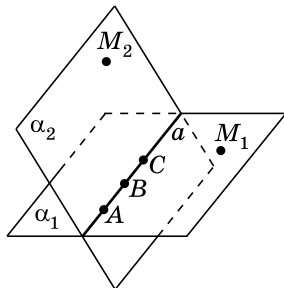
Доведення. Нехай точки A , B і C лежать на одній прямій – прямій a (мал. 1.12).

1) За аксіомою I існує точка, що прямій a не належить, назвемо її M_1 . За теоремою 1 через пряму a і точку M_1 можна провести площину, назвемо її α_1 . Вона проходить і через три дані точки.

2) За аксіомою C_1 існують точки, які не належать площині α_1 . Розглянемо точку M_2 , яка не належить площині α_1 , а тому не належить і прямій a , оскільки $a \subset \alpha_1$. Тоді через пряму a і точку M_2 можна провести площину α_2 . Ця площина також, як і площина α_1 , проходить через три дані точки.

Міркуючи аналогічно, можна дійти висновку, що існує безліч площин, які проходять через три точки, що лежать на одній прямій.

Відповідь. Безліч.



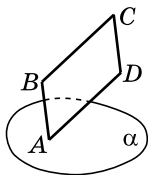
Мал. 1.12

Задача 2. Дано площину α і паралелограм $ABCD$. Чи може площині α належати:

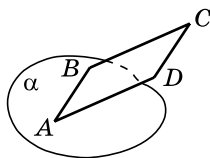
- 1) тільки одна вершина паралелограма;
- 2) тільки дві вершини паралелограма;
- 3) тільки три вершини паралелограма?

Розв'язання. 1) Може (мал. 1.13). 2) Може (мал. 1.14).

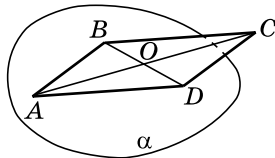
3) Припустимо, що три вершини паралелограма A , B і D належать площині α , а вершина C – ні (мал. 1.15). Проведемо діагоналі паралелограма AC і BD . Нехай O – точка їх перетину. Оскільки $B \in \alpha$ і $D \in \alpha$, то $BD \subset \alpha$, а тому $O \in \alpha$. Оскільки $A \in \alpha$ і $O \in \alpha$, то $AO \subset \alpha$. Але $C \in AO$, тому $C \in \alpha$. Маємо, що всі чотири вершини паралелограма належать площині α , що суперечить умові. Отже, наше припущення хибне, а тому тільки три із чотирьох вершин паралелограма $ABCD$ не можуть належати площині α .



Мал. 1.13



Мал. 1.14



Мал. 1.15

Відповідь. 1) Так; 2) так; 3) ні.

А ще раніше...

Давньогрецький учений Евклід у своїй видатній праці «Начала» зібрав і узагальнив досвід грецьких математиків. Були відомі Евклідові й аксіоми стереометрії, які ми розглянули в цьому параграфі. Так, наприклад, аксіому C_{II} Евклід сформулював так: «Частини прямої лінії не можуть лежати одна над площиною, а інша – у самій площині», а аксіому C_{III} – так: «Дві площини перетинаються по прямій лінії».

Безсумнівно, «Начала» Евкліда вже понад два тисячоліття слугують зразком дедуктивної побудови геометрії. Однак математики впродовж віків наголошували на основному недоліку аксіом Евкліда, включно з його постулатами, – їх неповноту, тобто недостатність їх для чіткої логічної побудови геометрії, за якої кожне твердження (теорема), якщо воно не фігурує в списку аксіом, має бути логічно виведене з аксіом і вже доведених раніше тверджень.

Упродовж століть математики неодноразово вдавалися до спроб дедуктивної побудови геометрії, завершився цей процес лише наприкінці XIX ст. завдяки роботам математиків М. Паша, Дж. Пеано, Дж. Веронезе, М. Пієрі і в першу чергу завдяки видатному німецькому математику Давиду Гільберту. У своїй класичній праці «Основи геометрії» (1899 р.) Гільберт сконструював аксіоматику геометрії так, що логічна структура геометрії стала абсолютно прозорою. Так, Гільберт не дав прямого означення основних геометричних об'єктів: точки, прямої, площини. Усе, що потрібно знати про ці об'єкти, він виклав в аксіомах, які є, по суті, їх непрямыми означеннями.

Серед аксіом Гільберта є й аксіоми стереометрії. Наприклад, одну з аксіом цього параграфа Гільберт сформулював так: «Якщо точки A і B прямої a лежать в площині α , то будь-яка точка цієї прямої лежить в площині α ».



Д. Гільберт
(1862–1943)



- Що таке стереометрія? • Які фігури називають плоскими, а які – просторовими? Наведіть приклади таких фігур. • Що таке аксіоматичний метод побудови геометрії? • Назвіть основні поняття стереометрії. • Як зображують та як позначають площини у стереометрії? • Сформулюйте аксіоми стереометрії. • Сформулюйте й доведіть найпростіші наслідки з аксіом стереометрії.



Графічна робота № 1

Виконайте малюнки до тверджень і підпишіть точки, прямі та площини на отриманих малюнках.

1. Пряма KL належить площині β .
2. Пряма AC перетинає площину α в точці D .
3. Площина γ проходить через пряму c і точку L , що цій прямій не належить, та перетинає пряму b в точці M .
4. Прямі AB і AC перетинають площину α у двох різних точках.
5. Прямі AB і AC перетинають площину β в одній і тій самій точці.
6. Площини α і β перетинаються по прямій c і перетинають пряму MN відповідно в точках M і N .
7. Площини α і β перетинаються по прямій c , площини α і γ також перетинаються по прямій c .
8. Площини α і β перетинаються по прямій KL , а площини α і γ перетинаються по іншій прямій – прямій KN .
9. Прямі a , b і c мають спільну точку K і лежать в одній площині.
10. Прямі a , b і c мають спільну точку, але не існує площини, якій належать усі ці три прямі.



Розв'яжіть задачі та вправи

- 1** 1.1. Намалюйте площину α , точку M , що належить цій площині, та точку N , яка цій площині не належить. Запишіть відповідні твердження за допомогою символів.
- 1.2. Намалюйте площину β та пряму a , що їй належить. Запишіть відповідне твердження за допомогою символів.
- 1.3. Дано пряму m , що належить площині β . Виконайте малюнок і позначте на ньому точки A і B , які належать площині β , але не належать прямій m .
- 1.4. Точки A і B належать площині α . Виконайте малюнок і позначте на ньому точку C , яка належить площині α , але не належить прямій AB , та точку K , яка не належить площині α .
- 1.5. Намалюйте площину γ та пряму a , що перетинає її у точці M . Скільки точок прямої a лежить у площині γ ?

1.6. (Усно.) Які з тверджень істинні:

- 1) будь-які дві точки завжди належать одній прямій;
- 2) будь-які три точки завжди належать одній прямій;
- 3) будь-які три точки завжди належать одній площині;
- 4) будь-які чотири точки завжди належать одній площині?

1.7. (Усно.) Чи можуть дві різні площини мати лише:

- 1) одну спільну точку;
- 2) дві спільні точки;
- 3) три спільні точки;
- 4) 2020 спільних точок?

1.8. Чи можуть пряма й площина мати лише:

- 1) одну спільну точку;
- 2) дві спільні точки;
- 3) три спільні точки;
- 4) 999 спільних точок?

2

1.9. (Усно.) Чи однакові за змістом твердження: «пряма належить площині» і «пряма й площина мають спільну точку»? Відповідь обґрунтуйте.

1.10. Відомо, що через три дані точки можна провести принаймні дві площини.

- 1) Яким є взаємне розміщення цих точок?
- 2) Скільки площин можна провести через ці три точки?

1.11. Відомо, що через дані пряму й точку можна провести принаймні дві площини.

- 1) Яким є взаємне розміщення прямої і точки?
- 2) Скільки площин можна провести через ці пряму й точку?

 **1.12.** Дано дві прямі, через які не можна провести площину. Чи можуть ці прямі перетинатися? Відповідь обґрунтуйте.

1.13. Дано дві площини, які не перетинаються. Чи можуть ці площини мати спільну точку? Відповідь обґрунтуйте.

1.14. Точки A , B , C і D не лежать в одній площині.

- 1) Чи можуть деякі три з них належати одній прямій?
 - 2) Чи можуть прямі AB і CD перетинатися?
- Відповіді обґрунтуйте.

1.15. Площини α і β мають три спільні точки A , B і C .

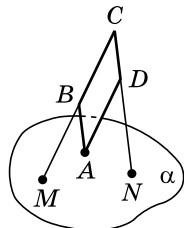
- 1) Чи можна дійти висновку, що α і β збігаються?
- 2) У якому випадку можна дійти висновку, що α і β збігаються?

1.16. (Усно.) Чому мотоцикл із коляскою може припаркуватися на дорозі стійко, а мотоциклу без коляски потрібна додаткова опора?

1.17. Чому незамкнені двері відчиняються, а замкнені двері нерухомі?

-  **1.18.** Прямі AB і CD перетинаються. Доведіть, що прямі AC і BD лежать в одній площині.
- 1.19.** Через прямі AB і AC проведено площину. Доведіть, що цій площині належить медіана AM трикутника ABC .
- 1.20.** Доведіть, що через будь-яку пряму і точку можна провести площину. Розгляньте два випадки.
- 1.21.** Доведіть, що через будь-які три точки можна провести площину. Розгляньте два випадки.
- 1.22.** Три прямі, які проходять через точку P , перетинають пряму a відповідно в точках A , B і C . Доведіть, що точки A , B , C і P лежать в одній площині.
- 1.23.** Прямі AB і AC перетинають пряму a в точках M і N відповідно. Доведіть, що точки A , B , C , M і N лежать в одній площині.
- 1.24.** У трапецію вписано коло. Чи можна стверджувати, що площина трапеції збігається з площиною:
- 1) яка проходить через середню лінію трапеції;
 - 2) яка проходить через діагональ трапеції;
 - 3) яка проходить через середини всіх сторін трапеції;
 - 4) кола, вписаного у трапецію?
- 1.25.** Навколо трикутника описано коло. Чи можна стверджувати, що площина трикутника збігається з площиною:
- 1) яка проходить через деяку середню лінію трикутника;
 - 2) яка проходить через медіану трикутника;
 - 3) яка проходить через середини всіх сторін трикутника;
 - 4) кола, вписаного у трикутник?
- 3 1.26.** Пряма b проходить через центри вписаного й описаного кіл трикутника ABC . Чи можна стверджувати, що $b \subset (ABC)$?
- 1.27.** Пряма a проходить через центр кола. Чи можна стверджувати, що пряма перетинає коло? Виконайте відповідний малюнок.
- 1.28.** Пряма c перетинає сторони AB і AC трикутника ABC . Чи можна стверджувати, що $c \subset (ABC)$?
- 1.29.** (Усно.) Як за допомогою двох ниток столяр може перевірити, чи лежать кінці чотирьох ніжок стола (або стільця) в одній площині?
- 1.30.** Прямі a і b перетинаються в точці K . Доведіть, що всі прямі, які не проходять через точку K і перетинають обидві ці прямі, лежать в одній площині.

- 1.31. Чи лежать в одній площині прямі a , b і c , якщо будь-які дві з них перетинаються, але не існує точки, що належить усім трьом прямим?
- 1.32. Кожні дві з трьох прямих a , b і c перетинаються, проте не існує площини, якій належать усі три прямі. Яке взаємне розміщення прямих a , b і c ?
- 1.33. Через точку перетину прямих KL і KM проведено пряму a , що не лежить з прямими KL і KM в одній площині. Доведіть, що прямі a і LM не перетинаються.
- 1.34. Прямі a , b і c належать одній площині та перетинаються у точці K . Доведіть, що існує площина, яка не проходить через точку K і перетинає три дані прямі.
- 1.35. Площини α і β перетинаються. Пряма a належить площині α і перетинає площину β в точці A , пряма b належить площині β і перетинає площину α в точці B . Доведіть, що AB – пряма перетину площин α і β .
- 1.36. Площини α і β перетинаються по прямій c . Пряма a належить площині α і перетинає площину β . Чи перетинаються прямі a і c ? Відповідь обґрунтуйте.
-  1.37. Точка M не належить площині трикутника ABC . Доведіть, що прямі MA і BC не перетинаються.
- 1.38. Дано пряму l і точку P , що їй не належить. Точка K не належить площині, що проходить через пряму l і точку P . Доведіть, що прямі l і PK не перетинаються.
- 1.39. (Усно.) Чи означають одне й те саме два таких твердження: «прямі a і b належать різним площинам» і «прямі a і b не належать одній площині»?
- 1.40. Дві вершини паралелограма та точка перетину його діагоналей належать площині α . Чи можна стверджувати, що дві інші вершини паралелограма також належать площині α ?
- 1.41. Вершина A опуклого плоского чотирикутника належить площині α (мал. 1.16), а вершини B , C і D не належать цій площині. Прямі CB і CD перетинають площину α відповідно в точках M і N . Чи правильно виконано малюнок 1.16? Відповідь обґрунтуйте.
- 1.42. Вершина D плоского чотирикутника $ABCD$ належить площині β , а всі інші вершини – їй не належать. Прямі BC і AC перетинають площину β відповідно в



Мал. 1.16

точках K і L . Доведіть, що точки K , L і D лежать на одній прямій.

 **1.43.** 1) Нехай A , B , C – три точки простору. Доведіть для простору *нерівність трикутника*: $AB \leq BC + CA$.

2) Скільки площин можна провести через точки M , N і P , якщо $MN = 0,5$ дм, $NP = 40$ мм, $MP = 8$ см?

1.44. Скільки площин можна провести через точки K , L і M , якщо $KL = 5$ см, $LM = 110$ мм, $KM = 0,6$ дм?

4 **1.45.** Кожна з трьох прямих перетинається з двома іншими. Скільки різних площин можна провести через дані прямі, беручи їх попарно? Укажіть та обґрунтуйте всі можливі випадки.

1.46. Основи трьох бісектрис трикутника належать площині α . Чи належать площині α вершини трикутника? Відповідь обґрунтуйте.

1.47. Середини трьох сторін трикутника належать площині α . Чи належать площині α вершини трикутника? Відповідь обґрунтуйте.

1.48. Основи висот трикутника належать площині β . Чи можна стверджувати, що площині β належать вершини трикутника?

1.49. Прямі a , b і c проходять через точку D . Площина, що не проходить через точку D , перетинає прямі a , b і c у точках, що не лежать на одній прямій. Доведіть, що прямі a , b і c не лежать в одній площині.

 **1.50.** Пряма a належить площині α , а пряма b перетинає цю площину в точці K , що не належить прямій a . Доведіть, що прямі a і b не перетинаються.

1.51. Прямі m і n не лежать в одній площині. На прямій a , що перетинає прямі m і n відповідно в точках M і N , позначено точку A , що не збігається ані з точкою M , ані з точкою N . Чи можна через точку A провести ще одну пряму, відмінну від прямої a , щоб вона перетинала прямі m і n ?

1.52. Прямі a і b не лежать в одній площині. Прямі c і d перетинають кожну з прямих a і b у попарно різних точках. Чи можна стверджувати, що прямі c і d не перетинаються?

1.53. Нехай m – пряма перетину площин α і β , пряма a належить площині α . Доведіть, що прямі m і a перетинаються тоді й тільки тоді, коли пряма a перетинає площину β .



1.54. Яку найменшу кількість сірників треба мати, щоб скласти з них 4 правильних трикутники, сторона кожного з яких дорівнює довжині сірника?

1.55. Яку найменшу кількість сірників треба мати, щоб скласти з них 6 квадратів, сторона кожного з яких дорівнює довжині сірника?

1.56. Доведіть, що коли будь-які дві з n прямих ($n > 2$) перетинаються і всі точки їх попарних перетинів різні, то всі прямі лежать в одній площині.

1.57. (Просторова теорема Дезарга). Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ лежать у різних площинах, а прямі, яким належать відповідні сторони трикутників, попарно перетинаються у точках P , Q і R (наприклад, прямі AB і A_1B_1 перетинаються у точці P). Доведіть, що точки P , Q і R лежать на одній прямій.



1.58. Відношення висоти до ширини екрана телевізора дорівнює $9 : 16$. Діагональ екрана телевізора дорівнює 40 дюймів. Знайдіть ширину екрана в сантиметрах.



1.59. (Видатні українці). 1) Пригадайте планіметричні фігури та запишіть їх назви в рядки (перші літери назв фігур вказано). У виділеному стовпчику отримаєте прізвище видатного українського математика.

Т								
		П						
	Т							
		К						
	Т							
	К							
В								

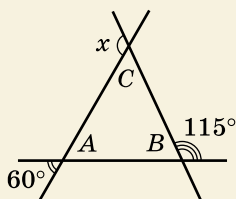
2) Знайдіть відомості про життєвий шлях цього математика.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання
№ 1

1. Знайдіть градусну міру кута x (див. мал.).

А	Б	В	Г	Д
120°	125°	130°	135°	140°



2. Знайдіть довжину відрізка AB , якщо $A(-2; 7)$, $B(2; 4)$.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	6	7

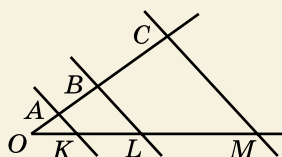
3. Сторони трикутника, одна з яких на 2 см більша за іншу, утворюють кут 120° . Знайдіть периметр трикутника, якщо довжина третьої сторони дорівнює 7 см.

А	Б	В	Г	Д
7 см	10 см	15 см	18 см	інша відповідь

4. Укажіть міру внутрішнього кута правильного 20-кутника.

А	Б	В	Г	Д
150°	154°	156°	160°	162°

5. Відомо, що $AK \parallel BL \parallel CM$, $OA = 2$ см, $AB = 4$ см, $KL = 6$ см, $LM = 9$ см (див. мал.). Установіть відповідність між відрізком (1–4) та його довжиною (А–Д).



Відрізок Довжина відрізка

- | | | | |
|---|------|---|-------|
| 1 | BC | А | 3 см |
| 2 | OK | Б | 6 см |
| 3 | OC | В | 9 см |
| 4 | OL | Г | 12 см |
| | | Д | 15 см |

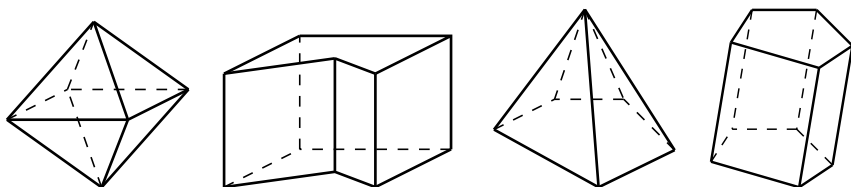
	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 3 см і 13 см, а діагональ ділить тупий кут навпіл. Знайдіть площу трапеції (у см^2).

§ 2. ПОЧАТКОВІ УЯВЛЕННЯ ПРО МНОГОГРАННИКИ. НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ ПЕРЕРІЗІВ МЕТОДОМ СЛІДІВ

У попередніх класах ви вже ознайомилися з деякими просторовими фігурами, наприклад прямокутним паралелепіпедом, кубом, пірамідою.

Прямокутний паралелепіпед, куб і піраміда – це *многогранники*. Многогранник являє собою геометричне тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників. На малюнку 2.1 зображено деякі многогранники.



Мал. 2.1

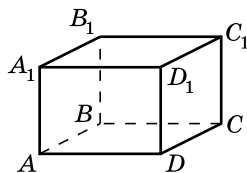
Плоскі многокутники, що утворюють поверхню многогранника, називають *гранями многогранника*, сторони цих многокутників – *ребрами многогранника*, а вершини цих многокутників – *вершинами многогранника*.

Один з розділів курсу стереометрії буде присвячено многогранникам, а поки що пригадаємо основні відомості про *прямокутний паралелепіпед, куб, піраміду* та навчимося розв'язувати найпростіші задачі, пов'язані з ними, і будувати їх найпростіші *перерізи*.

1. Прямокутний паралелепіпед. Куб

Сірникова коробка, цеглина, платтяна шафа тощо дають уявлення про *прямокутний паралелепіпед*. Поверхня прямокутного паралелепіпеда складається із шести прямокутників (мал. 2.2), які є його *гранями*. Сторони і вершини цих прямокутників є відповідно *ребрами* і *вершинами* прямокутного паралелепіпеда: усього – 12 ребер і 8 вершин. Грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ прямокутного паралелепіпеда, зображеного на малюнку 2.2, є його *основами*, тому цей прямокутний паралелепіпед будемо називати $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (за назвами його основ).

В одному з наступних параграфів детально розглянемо, як у стереометрії зображувати плоскі й просторові фігури.



Мал. 2.2

Зокрема, з малюнка 2.2 зрозуміло, що прямокутник у стереометрії зазвичай зображують паралелограмом. Отже, прямокутний паралелепіпед доцільно зображувати так, як його зображено на малюнку 2.2.

Довжини непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називають його *лінійними вимірами*. Прямокутний паралелепіпед має три лінійних виміри, які ще називають довжиною, шириною і висотою прямокутного паралелепіпеда.

Прямокутний паралелепіпед, у якого всі три лінійних виміри між собою рівні, називають *кубом*. Усі грані куба – квадрати.

2. Піраміда

Нехай маємо довільний многокутник, наприклад чотирикутник $ABCD$, і точку Q , що не належить площині цього многокутника. Сполучимо точку Q з усіма вершинами многокутника (мал. 2.3). Многогранник, який обмежено даним чотирикутником і трикутниками ABQ , BCQ , CDQ і ADQ , називають *пірамідою*, а сторони цих чотирикутника і трикутників – *ребрами піраміди*. Невидимі ребра на малюнку зображують пунктиром. Чотирикутник $ABCD$ – *основа піраміди*, трикутники – *бічні грані*, точка Q – *вершина піраміди*, відрізки QA , QB , QC , QD – *бічні ребра*.

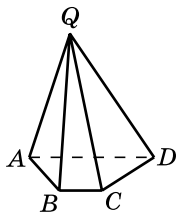
Піраміду називають *n-кутною*, якщо її основою є n -кутник.

Домовимося називати піраміду за назвою її основи і вершини, починаючи з вершини. На малюнку 2.3 маємо *чотирикутну піраміду* $QABCD$.

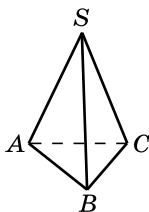
Піраміду, основою якої є трикутник, називають *трикутною пірамідою* або *тетраедром*. Усі грані тетраедра – трикутники. На малюнку 2.4 маємо тетраедр $SABC$. Тетраедр, усі грані якого – правильні трикутники, називають *правильним тетраедром*. Усі шість його ребер мають однакову довжину.

3. Найпростіші задачі з многогранниками

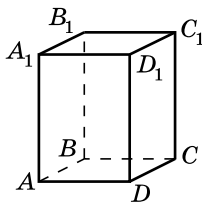
Розглянемо найпростіші задачі з просторовими фігурами, які ми щойно пригадали.



Мал. 2.3



Мал. 2.4



Мал. 2.5

Задача 1. На малюнку 2.5 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCA_1B_1C_1D_1$.

- 1) Чи належить точка C_1 площині CDD_1 ?
- 2) У якій точці пряма AB перетинає площину B_1C_1C ?
- 3) Яка площина проходить через точку B і пряму CD ?
- 4) По якій прямій перетинаються площини ABC і A_1B_1B ?
- Розв'язання. 1) Грань прямокутного паралелепіпеда CDD_1C належить площині CDD_1 . Тому точка C_1 належить цій площині.
- 2) Оскільки $B \in AB$ і $B \in (B_1C_1C)$, то $AB \cap (B_1C_1C) = B$.
- 3) Через точку B і пряму CD проходить площина BCD .
- 4) Оскільки $AB \subset (ABC)$, $AB \subset (A_1B_1B)$, то $(ABC) \cap (A_1B_1B) = AB$.
- Відповідь. 1) Так; 2) B ; 3) (BCD) ; 4) AB .

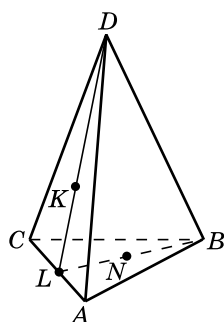
Задача 2. На малюнку 2.6 зображено трикутну піраміду $DABC$. Укажіть:

- 1) площини, яким належить пряма KL ;
- 2) точку перетину прямої BN з площиною CAD ;
- 3) пряму перетину площин DKB і ABC .

Розв'язання.

- 1) Оскільки $K \in (ACD)$ і $L \in (ACD)$, то $KL \subset (ACD)$, аналогічно, $KL \subset (DLB)$.
- 2) Оскільки $L \in BN$ і $L \in (CAD)$, то $BN \cap (CAD) = L$.
- 3) Оскільки $LB \subset (DKB)$ і $LB \subset (ABC)$, то $(DKB) \cap (ABC) = LB$.

Відповідь. 1) (ACD) , (DLB) ; 2) L ; 3) LB .

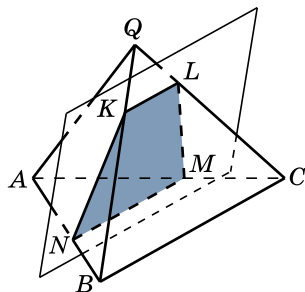


Мал. 2.6

4. Поняття про переріз многогранника

Під час вивчення стереометрії вам траплятимуться задачі, для розв'язування яких важливо мати переріз просторової фігури певною площиною. Серед них будуть і ті, що пов'язані з многогранниками. З'ясуємо, що ж розуміють під поняттям перерізу многогранника.

Січною площиною многогранника називатимемо будь-яку площину, по обидва боки якої є точки даного многогранника. Січна площина перетинатиме грані многогранника по відрізках. Многокутник, сторонами якого є ці відрізки, і називатимемо *перерізом многогранника*. На малюнку 2.7 чотирикутник $KLMN$ є перерізом трикутної піраміди $QABC$.



Мал. 2.7

Зауважимо, що січну площину можна задавати будь-яким з відомих нам способів задання площини: трьома точками, що не лежать на одній прямій; прямою і точкою, що їй не належить; двома прямими, що перетинаються. Для побудови перерізу достатньо побудувати точки перетину січної площини з ребрами многогранника. Далі кожні дві такі точки, що належать одній і тій самій грані, сполучити відрізками. Многокутник, який отримаємо в такий спосіб, і буде перерізом многогранника.

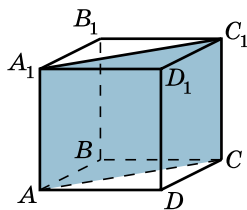
Далі розглянемо кілька найпростіших побудов перерізів прямокутного паралелепіпеда, куба та піраміди.

5. Побудова перерізу прямокутного паралелепіпеда і куба

діагональним перерізом.

На малюнку 2.8 діагональним перерізом прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є прямокутник $AA_1 C_1 C$, одна зі сторін якого – діагональ AC основи, а інша – бічне ребро AA_1 .

Іноді в задачах треба не лише побудувати переріз, а й знайти його площу чи периметр або використати побудований переріз з іншою метою.



Мал. 2.8

Задача 3. Знайти площу діагонального перерізу $AA_1 C_1 C$ прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, де $AD = 5$ см, $DC = 12$ см, $AA_1 = 4$ см.

Розв'язання. Переріз зображено на малюнку 2.8.

1) У трикутнику ADC ($\angle D = 90^\circ$) маємо:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ (см)},$$

$$2) S_{AA_1 C_1 C} = AC \cdot AA_1 = 13 \cdot 4 = 52 \text{ (см}^2\text{)}.$$

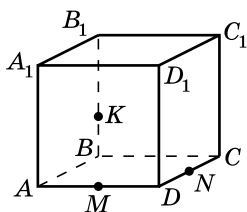
Відповідь. 52 см².

Далі розглянемо, як будувати перерізи прямокутного паралелепіпеда або куба.

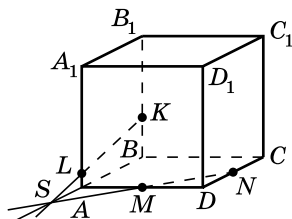
Задача 4. Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. На його ребрах AD , DC і BB_1 позначено точки M , N і K (мал. 2.9). Побудувати переріз куба площиною, що проходить через точки M , N і K .

Розв'язання. Січною площиною буде площина MNK .

1) Спочатку побудуємо пряму, по якій площина MNK перетинає бічну грань $AA_1 B_1 B$. Точка K є спільною точкою для площини MNK і грані $AA_1 B_1 B$.



Мал. 2.9



Мал. 2.10

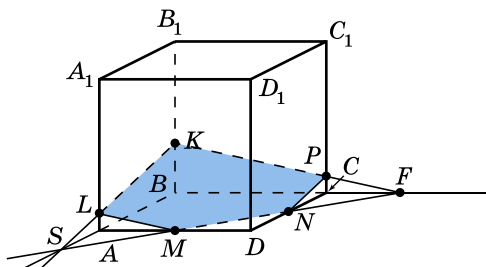
2) Знайдемо ще одну спільну точку площини MNK і грані AA_1B_1B . Продовжимо відрізки MN і AB , які належать одній і тій самій площині ACD , до їх перетину в точці S (мал. 2.10). Оскільки $S \in AB$, а $AB \subset (AA_1B)$, то $S \in (AA_1B)$. Отже, точка S належить і площині MNK , і грані AA_1B_1B . Тоді пряма KS належить і площині MNK , і грані AA_1B_1B , отже, і є тією прямою, по якій січна площина перетинає грань AA_1B_1B .

3) Пряма SK перетинає ребро AA_1 в точці L .

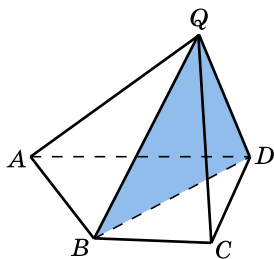
4) Продовжимо MN до перетину з прямою BC , матимемо точку F (мал. 2.11).

5) Пряма KF належить як площині MNK , так і грані BB_1C_1C , та перетинає CC_1 у точці P (мал. 2.11).

6) Отже, многокутник $KLMPN$ – шуканий переріз.



Мал. 2.11



Мал. 2.12

6. Побудова перерізу піраміди

діагональним перерізом.

На малюнку 2.12 BQD – діагональний переріз чотирикутної піраміди $QABCD$. Діагональним перерізом піраміди є трикутник, однією з вершин якого є вершина піраміди.

Розглянемо, як побудувати переріз піраміди.

Переріз піраміди, що проходить через два бічних ребра, які не належать одній грані, називають

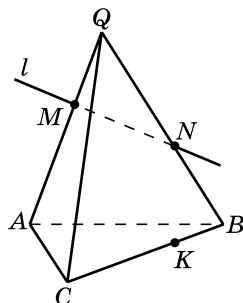
Задача 5. Пряма l перетинає бічні ребра QA і QB тетраедра $QABC$ в точках M і N (мал. 2.13), точка K належить ребру основи BC . Побудувати переріз піраміди, що проходить через пряму l і точку K .

Розв'язання. 1) Точка K є спільною точкою січної площини і площини ABC . Знайдемо ще одну їх спільну точку.

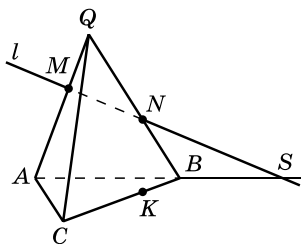
2) Прямі l і AB не паралельні та лежать в одній площині – площині QAB . Нехай S – точка їх перетину (мал. 2.14). Ця точка належить як січній площині, так і площині ABC .

3) Отже, січна площина і площина ABC перетинаються по прямій SK . Пряма SK перетинає ребро AC у деякій точці L .

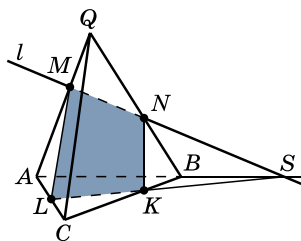
4) Отже, чотирикутник $KLMN$ – шуканий переріз (мал. 2.15).



Мал. 2.13



Мал. 2.14



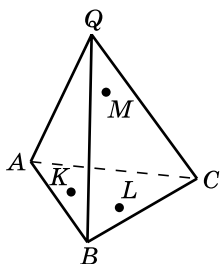
Мал. 2.15

Зауважимо, що за умовою задачі 5 прямі l і AB не паралельні. Якби пряма l була паралельна прямій AB , то точки їх перетину не існувало б. У такому разі переріз тетраедра $QABC$ площиною, що проходить через пряму l і точку K , треба було б будувати іншим способом. Цей спосіб розглянемо в одному з наступних параграфів.

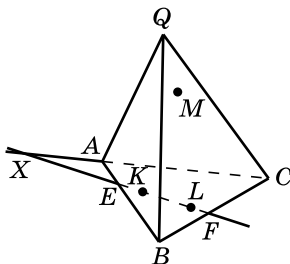
7. Метод слідів

Повертаючись до задач 4 і 5 про побудову перерізів куба і тетраедра, зауважимо, що в обох випадках побудова ґрунтувалася на знаходженні ліній перетину січної площини з гранями многогранника, тобто на знаходженні так званих «слідів», які залишає січна площина на гранях многогранника. Звідси й походить назва вказаного методу побудови перерізу – *метод слідів*. Сліди січної площини на гранях многогранника і є сторонами того многокутника, який є шуканим перерізом.

У задачах 4 і 5 точки, якими було задано січну площину, належали ребрам многогранника. Розглянемо, як методом слідів побудувати переріз у випадку, коли січну площину задано точками, що лежать на гранях многогранника.



Мал. 2.16



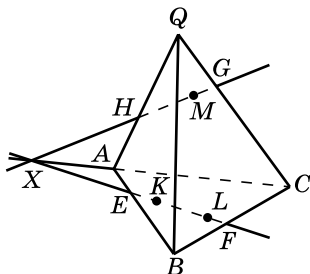
Мал. 2.17

Задача 6. Точки K і L належать грані ABC тетраедра $QABC$, а точка M належить грані QAC (мал. 2.16). Побудувати переріз тетраедра площиною, що проходить через точки K , L і M .

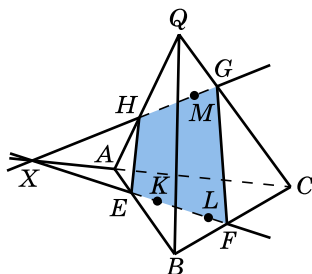
Розв'язання. Щоб побудувати переріз, знайдемо сліди, які залишає січна площина KLM на гранях тетраедра.

1) Оскільки точки K і L належать грані ABC , то пряма KL належить площині ABC і перетинає ребро AB у точці E , ребро BC – у точці F , продовження ребра AC – у точці X (мал. 2.17). Отже, відрізок EF – слід січної площини на грані ABC .

2) Точка X належить прямій AC , тому належить і площині AQC . Оскільки точки X і M лежать у площині AQC , то пряма XM належить площині AQC і перетинає ребро AQ у точці H , ребро QC – у точці G (мал. 2.18). Отже, відрізок HG – слід січної площини на грані AQC .



Мал. 2.18



Мал. 2.19

3) Тоді відрізки EH і GF – сліди січної площини на гранях AQB і BQC відповідно (мал. 2.19).

4) Отже, чотирикутник $EFGH$ (мал. 2.19) – шуканий переріз.

Розв'язування задачі 6 стисло можна записати так:

1) $K \in (ABC)$, $L \in (ABC)$, тоді $KL \subset (ABC)$, $KL \cap AB = E$, $KL \cap BC = F$, $KL \cap AC = X$, тому $EF \subset (ABC)$, отже, $EF = (KLM) \cap (ABC)$.

2) $X \in (AQC)$, $M \in (AQC)$, тоді $XM \subset (AQC)$, $XM \cap AQ = H$, $XM \cap QC = G$, тому $HG \subset (AQC)$, отже, $HG = (KLM) \cap (AQC)$.

3) $EH = (KLM) \cap (AQB)$, $GF = (KLM) \cap (BQC)$.

4) Чотирикутник $EFGH$ – шуканий переріз.

Зауважимо, що за умовою задачі 6 прямі KL і AC не паралельні. Спосіб побудови перерізу у випадку, коли прямі $KL \parallel AC$ розглянемо в одному з наступних параграфів.



• Що являє собою многогранник? • З яких елементів складається поверхня прямокутного паралелепіпеда і що називають його лінійними вимірами? • Яку фігуру називають кубом? • Назвіть елементи піраміди. • Що називають січною площиною многогранника? • Що називають перерізом многогранника? • Що називають діагональним перерізом прямокутного паралелепіпеда або куба? • Що називають діагональним перерізом піраміди? • Що розуміють під методом слідів для побудови перерізу?

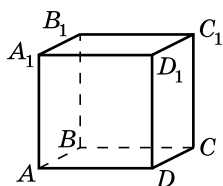


Розв'яжіть задачі та вправи

1 2.1. На малюнку 2.20 зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

1) Чи належить точка C площині ABD ?

2) Чи належить точка B площині DCC_1 ?



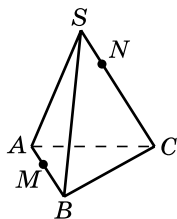
Мал. 2.20

3) У якій точці пряма AA_1 перетинає площину ABC ?

4) Укажіть будь-яку пряму, що перетинає площину $AA_1 B$.

5) Укажіть площину, що проходить через точку B і пряму $C_1 C$.

6) Укажіть будь-яку пряму, що належить площині $A_1 B_1 C_1$.



Мал. 2.21

2.2. На малюнку 2.21 зображено трикутну піраміду $SABC$, точку M , що належить ребру AB , та точку N , що належить ребру SC .

1) Чи належить точка M площині ABC ?

2) Чи належить точка B площині SAC ?

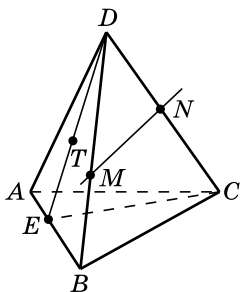
3) У якій точці пряма SB перетинає площину ABC ?

4) Укажіть будь-яку пряму, що перетинає площину SBC .

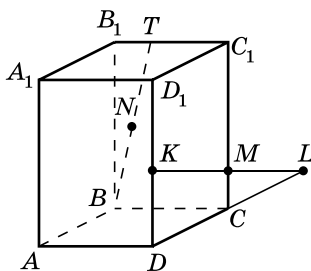
- 5) Укажіть площину, яка проходить через точку N і пряму SA .
- 6) Укажіть будь-яку пряму, що належить площині SAB .
- 2.3. Побудуйте діагональний переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- 2.4. Побудуйте діагональний переріз куба $KLMNK_1 L_1 M_1 N_1$.
- 2.5. Дано п'ятикутну піраміду $QABCDE$. Побудуйте її діагональний переріз, який проходить через бічні ребра QA і QC .
- 2.6. Побудуйте діагональний переріз чотирикутної піраміди $QABCD$, що проходить через бічні ребра QB і QD .
- 2** 2.7. На малюнку 2.21 зображено трикутну піраміду $SABC$. Укажіть:
- 1) пряму перетину площин ASB і SMC ;
 - 2) площину, що проходить через прямі BN і SC .
- 2.8. На малюнку 2.20 зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажіть:
- 1) пряму перетину площин $DD_1 C_1$ і ABD ;
 - 2) площину, що проходить через прямі $A_1 B$ і AB_1 .
- 2.9. Побудуйте переріз куба $KLMNK_1 L_1 M_1 N_1$ площиною, що проходить через точки A , B і C – середини ребер KL , LM і LL_1 відповідно.
- 2.10. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, що проходить через точки A , C і середину ребра BB_1 .
- 2.11. $QABC$ – трикутна піраміда, $AB = 6$ см, $BC = 4$ см, $AC = 8$ см.
- 1) Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через середини бічних ребер QA , QB і QC .
 - 2) Знайдіть периметр цього перерізу.
- 2.12. $QKLM$ – трикутна піраміда, основою якої є правильний трикутник KLM , $KL = 6$ см.
- 1) Побудуйте переріз, що проходить через точку L і точки A і B – середини ребер QK і QM відповідно.
 - 2) Знайдіть довжину відрізка AB .
- 2.13. Побудуйте тетраедр $QABC$ і на його ребрах AB і QA позначте відповідно точки M і K .
- 1) Побудуйте прямі перетину площин ABQ і CMK , CMK і ABC , CMK і AQC .
 - 2) Укажіть, яку фігуру можна отримати як переріз даного тетраедра площиною CMK .

- 2.14.** Побудуйте куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ і на його грані $ABCD$ позначте дві довільні точки M і K . Побудуйте:
- 1) пряму перетину площини A_1MK з гранню $ABCD$;
 - 2) точки перетину площини A_1MK з прямими, що містять ребра куба AD і BC ;
 - 3) відрізок, по якому площина A_1MK перетинає грань AA_1D_1D .

- 3 2.15.** На малюнку 2.22 зображено тетраедр $DABC$. Назвіть:
- 1) усі площини, яким належить кожна з прямих TE , MN , DB , AB , EC ;
 - 2) точку перетину прямої DN із площиною ABC ; прямої CE з площиною ABD ;
 - 3) точки, що належать як площині ADB , так і площині ABC ;
 - 4) пряму перетину площин DTC і ABC .



Мал. 2.22



Мал. 2.23

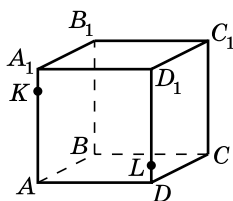
- 2.16.** На малюнку 2.23 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назвіть:
- 1) точки, що належать як площині DCC_1 , так і площині BTB_1 ;
 - 2) усі площини, яким належить пряма DL ;
 - 3) точку перетину прямої KM з площиною ABC ; прямої BN із площиною $A_1B_1C_1$;
 - 4) пряму перетину площин NB_1C_1 і ABC .

- 2.17.** $ABCA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 2.24).

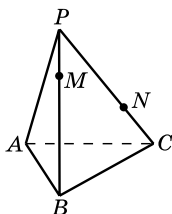
- 1) Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте точку перетину прямої KL з площиною ABC та точку перетину прямої KL з площиною $A_1B_1C_1$. Побудову обґрунтуйте.
- 2) За якої умови таку побудову виконати неможливо?

- 2.18.** $PABC$ – трикутна піраміда (мал. 2.25).

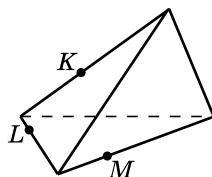
- 1) Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте точку перетину прямої MN з площиною ABC . Побудову обґрунтуйте.
- 2) За якої умови така побудова неможлива?



Мал. 2.24

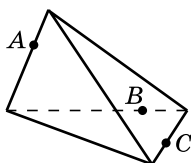


Мал. 2.25

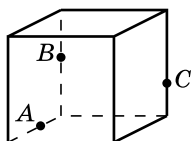


Мал. 2.26

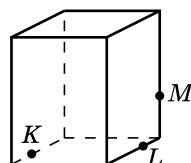
- 2.19.** Перенесіть у зошит малюнок 2.26 і побудуйте переріз піраміди площиною KLM .
- 2.20.** Перенесіть у зошит малюнок 2.27 і побудуйте переріз піраміди площиною ABC .
- 2.21.** Перенесіть у зошит малюнок 2.28 і побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда площиною ABC .
- 2.22.** Перенесіть у зошит малюнок 2.29 і побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда площиною KLM .



Мал. 2.27

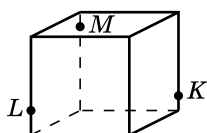


Мал. 2.28

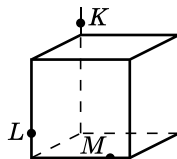


Мал. 2.29

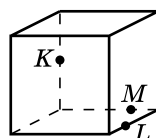
- 2.23.** Через кінці трьох ребер куба, що виходять з однієї вершини, провели площину. Знайдіть лінії перетину цієї площини з гранями куба. Знайдіть периметр і площу фігури, обмеженої цими лініями, якщо ребро куба дорівнює 1 дм.
- 2.24.** Ребро куба дорівнює 4 см. Через середини трьох ребер куба, що виходять з однієї вершини, провели площину. Знайдіть периметр і площу отриманого перерізу.
- 2.25.** На малюнках 2.30–2.32 точки K , L і M належать ребрам куба або їх продовженням. Перенесіть кожний малюнок у зошит і побудуйте на ньому переріз куба площиною KLM для кожного із заданих розміщень точок K , L , M .



Мал. 2.30

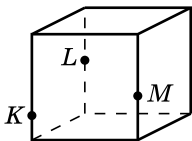


Мал. 2.31

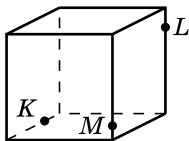


Мал. 2.32

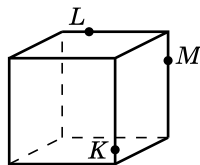
- 2.26.** Точки K , L і M належать ребрам куба (мал. 2.33–2.35). Перенесіть кожний малюнок у зошит і побудуйте на ньому переріз куба площиною KLM .



Мал. 2.33

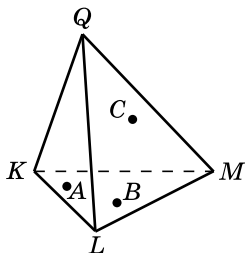


Мал. 2.34

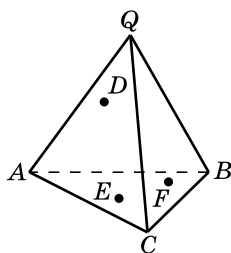


Мал. 2.35

- 2.27.** Точки A і B належать грані KLM тетраедра $QKLM$, а точка C – грані QKM (мал. 2.36). Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте переріз тетраедра площиною ABC .



Мал. 2.36



Мал. 2.37

- 2.28.** Точки E і F належать грані ABC тетраедра $QABC$, а точка D – грані AQB (мал. 2.37). Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте переріз тетраедра площиною DEF .
- 2.29.** $PABC$ – трикутна піраміда (мал. 2.25). Пряма MN не паралельна прямій BC . Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте пряму перетину площин AMN і ABC . Побудову обґрунтуйте.
- 2.30.** $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 2.24). Пряма KL не паралельна прямій AD . Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте пряму перетину площин KLC і ABC . Побудову обґрунтуйте.

- 4 2.31.** 1) Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда площиною, що проходить через середини трьох його ребер, що виходять з однієї вершини.

2) Знайдіть площу цього перерізу, якщо лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 8 см, 8 см і 6 см.

- 2.32.** 1) $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб з ребром 2 см. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через пряму BD і середину ребра AA_1 .

2) Знайдіть площу отриманого перерізу.

2.33. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Побудуйте його переріз площиною KLM , якщо:

1) точки K , L і M належать ребрам BB_1 , CC_1 , DD_1 відповідно і $BK : KB_1 = 1 : 3$, $CL : LC_1 = 3 : 1$, $DM : MD_1 = 3 : 2$;

2) точки K , L і M – середини ребер AB , BC і DD_1 відповідно.

2.34. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Побудуйте його переріз площиною EFG , якщо:

1) точки E , F і G належать ребрами AA_1 , BB_1 , CC_1 відповідно і $AE : EA_1 = 1 : 2$, $BF : FB_1 = 2 : 1$, $CG : GC_1 = 1 : 1$;

2) точки E , F і G – середини ребер AB , AD і CC_1 .

2.35. 1) Площина α проходить через вершину Q тетраедра $QABC$ та точки M і K , що належать ребрам AB і BC відповідно. Побудуйте переріз тетраедра площиною α .

2) Площина β проходить через середини ребер QA , QB і QC тетраедра $QABC$. Побудуйте переріз тетраедра площиною β .

3) Побудуйте відрізок прямої перетину площин α і β , що лежить всередині тетраедра.

2.36. Ребро правильного тетраедра $QABC$ дорівнює 6 см. Точки L і K – середини ребер AQ і BQ відповідно, точка T належить ребру QC , причому $QT : TC = 4 : 1$. Знайдіть відстань від точок A , B і C до лінії перетину площин TLK і ABC .

2.37. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює 4 см. Точка M належить ребру AA_1 , $AM = 3$ см. Точка N належить ребру CC_1 , $NC_1 = 1$ см. Точка K ділить ребро DD_1 у відношенні $1 : 3$, рахуючи від вершини D . Знайдіть відстань від точки B до лінії перетину площин KMN і ABC .

2.38. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб з ребром 4 см, точка M – середина ребра AA_1 , точка N належить ребру DD_1 , $D_1 N = 3$ см. Знайдіть:

1) K_1 – точку перетину прямої MN з площиною ABC ;

2) K_2 – точку перетину прямої MN з площиною $A_1 B_1 C_1$;

3) довжину відрізка $K_1 K_2$;

4) K_3 – точку перетину прямої BK_1 з площиною $DK_1 C$;

5) у якому відношенні, рахуючи від точки C , точка K_3 ділить відрізок CD ;

6) пряму перетину площин $K_1 K_2 K_3$ і $AA_1 B$.



2.39. Дано тетраедр $Q EFG$, усі ребра якого по 4 см. Точки L і M належать ребрам QG і QE відповідно, $QL = 1$ см, $QN = 1$ см, точка M – середина ребра QM . Знайдіть:

- 1) K_1 – точку перетину прямої ML і площини EFG ;
- 2) K_2 – точку перетину прямої MN і площини EFG ;
- 3) довжину відрізка K_1K_2 ;
- 4) точку перетину прямої MN і площини ELF ;
- 5) пряму перетину площин LK_1K_2 і NFE ;
- 6) відношення, у якому площина LK_1K_2 ділить відрізок QE , рахуючи від точки Q .

2.40. $QABC$ – тетраедр, усі ребра якого по 4 см. Точка M – середина AQ , точка K – середина BQ , точка E належить ребру CQ , $QE = 3$ см. Знайдіть:

- 1) L_1 – точку перетину прямої ME з площиною ABC ;
- 2) L_2 – точку перетину прямої KE з площиною ABC ;
- 3) довжину відрізка L_1L_2 ;
- 4) точку перетину прямої ME з площиною AKC ;
- 5) пряму перетину площин ML_1K і L_2QC ;
- 6) у якому відношенні площина ML_1L_2 ділить відрізок QB , рахуючи від точки Q .



2.41. У 2008 році в Україні було створено найбільший на той час у світі квітковий годинник. Годинниковий механізм на тлі квіткового панно розмістився на схилі біля Майдану Незалежності в Києві. Діаметр годинника – 19,5 м, діаметр циферблата – 16,5 м, а довжина стрілок – 4 м і 7 м. Знайдіть довжину кіл, які описують кінці годинної та хвилинної стрілок за один оберт. (Для спрощення обчислень використайте округлення: $\pi \approx 3$).



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

2.42. На площині дано пряму m і точку A , що цій прямій не належить. Скільки прямих, паралельних прямій m , можна провести через точку A ?

2.43. $ABCD$ – паралелограм. У площині паралелограма проведено пряму KL так, що $KL \parallel BC$. Доведіть, що $KL \parallel AD$.



2.44. (Київська міська математична олімпіада, 1989 р.). Периметр трикутника ABC дорівнює $2p$, довжина сторони AB дорівнює b , кут ABC дорівнює β . Коло із центром у точці O , яке вписано у цей трикутник, дотикається до сторони BC у точці K . Обчисліть площу трикутника BOK .

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання
№ 2

1. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого 6 см, а бічна сторона 7 см.

А	Б	В	Г	Д
19 см	20 см	21 см	22 см	23 см

2. Гострий кут паралелограма дорівнює 60° , а його сторони – 5 см і 12 см. Знайдіть меншу діагональ паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
12 см	13 см	$\sqrt{109}$ см	$\sqrt{113}$ см	інша відповідь

3. Укажіть відстань від точки $P(-3; 4)$ до початку координат.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	6	7

4. Знайдіть менший гострий кут прямокутного трикутника, якщо один його катет в $\sqrt{3}$ разів більший за інший.

А	Б	В	Г	Д
10°	15°	20°	25°	30°

5. Установіть відповідність між властивістю правильного багатокутника (1–4) та кількістю його сторін (А–Д).

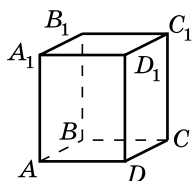
Властивість	Кількість сторін	А	Б	В	Г	Д
1 внутрішній кут дорівнює 135°	А 8	1				
2 зовнішній кут дорівнює 30°	Б 9	2				
3 зовнішній кут на 100° менший від внутрішнього	В 10	3				
4 кількість діагоналей дорівнює 35	Г 11 Д 12	4				

6. Сторони трикутника, одна з яких утричі більша за іншу, утворюють між собою кут 120° . Знайдіть меншу сторону трикутника, якщо його площа дорівнює $12\sqrt{3}$.

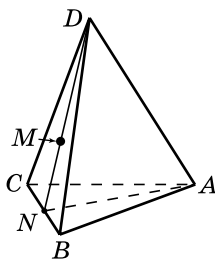
ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. Скільки площин можна провести через дві прямі, які перетинаються?
А. Жодної Б. Одну В. Дві Г. Безліч
2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 2.38). Укажіть точку, що належить площині $DD_1 C_1$.
А. А Б. A_1 В. B_1 Г. С
3. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 2.38). Укажіть пряму, яка перетинає площину ABA_1 .
А. $D_1 C_1$ Б. $B_1 C_1$ В. BB_1 Г. DD_1
- 2** 4. Прямі AB і CD перетинаються. Тоді...
А. Точка А не належить площині BCD
Б. Точка D не належить площині ABC
В. Прямі AD і BC лежать в одній площині
Г. Прямі AC і BD не лежать в одній площині



Мал. 2.38



Мал. 2.39

5. $DABC$ – трикутна піраміда (мал. 2.39). Укажіть пряму, по якій перетинаються площини DMA і ABC .
А. AN Б. AM В. BC Г. AB
6. $DABC$ – тетраедр (мал. 2.39). Укажіть площину, що проходить через прямі AN і DB .
А. ADN Б. ABC
В. ADB Г. Такої площини не існує
- 3** 7. Пряма t перетинає дві сторони паралелограма $ABCD$. У якому випадку можна стверджувати, що пряма t належить площині паралелограма?
А. Якщо пряма t перетинає сторони AB і AD
Б. Якщо пряма t перетинає сторони AB і CD
В. Якщо пряма t перетинає сторони AB і BC
Г. Якщо пряма t перетинає сторони BC і CD

8. Скільки площин можна провести через точки K , L і M , якщо $KL = 1$ см, $LM = 22$ мм, $KM = 3,2$ см?

А. Жодної Б. Одну В. Дві Г. Безліч

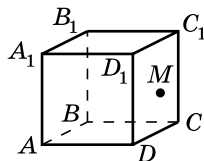
9. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб (мал. 2.40). Точка M належить грані $CDD_1 C_1$. Укажіть пряму, по якій перетинаються площини $D_1 C_1 M$ і ABC .

А. Такої прямої не існує

Б. $D_1 M$

В. CD

Г. BC



Мал. 2.40

- 4 10. Прямі a і b перетинаються в точці A , прямі a і c – у точці B , а прямі b і c – у точці C . Пряма t проходить через точку A . Скільки різних прямих можна провести через прямі a , b , c і t , беручи їх попарно (тобто кожна з площин має проходити через дві із чотирьох даних прямих)?

А. Одну

Б. Одну або три

В. Одну або чотири

Г. Безліч

11. Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Точка K – середина BC , точка L – середина CD , точка M – середина AA_1 . Укажіть фігуру, що є перерізом куба площиною KLM .

А. Квадрат

Б. Трикутник

В. Шестикутник

Г. П'ятикутник

12. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = AD = 4$ см, $CC_1 = 3$ см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через пряму BD і точку C_1 .

А. $2\sqrt{34}$ см²

Б. $\sqrt{34}$ см²

В. $4\sqrt{34}$ см²

Г. $2\sqrt{17}$ см²

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

ДО §§ 1-2

- 1 1. Пряма a належить площині γ . Виконайте відповідний малюнок і позначте на ньому точку M , яка належить площині γ і не належить прямій a , та точку P , яка не належить площині γ .

2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб (мал. 2.41).

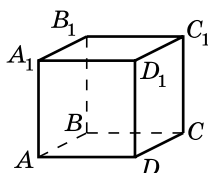
1) Чи належить точка D площині $A_1 B_1 B$?

2) Чи належить точка C_1 площині $C_1 D_1 D$?

3. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб (мал. 2.41).

1) У якій точці пряма AB перетинає площину $B_1 C_1 C$?

2) Укажіть будь-яку пряму, що належить площині $A_1 B_1 C_1$.

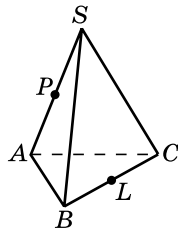


Мал. 2.41

2 4. Через прямі AC і BC проведено площину. Доведіть, що бісектриса CL трикутника ABC належить цій площині.

5. $SABC$ – трикутна піраміда (мал. 2.42), точка P належить ребру AS , точка L – ребру BC . Укажіть:

- 1) пряму перетину площин SBC і SLA ;
- 2) площину, що проходить через прямі BP і AS .



Мал. 2.42

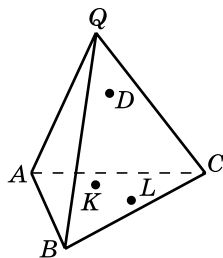
6. $QKLM$ – тетраедр, $KL = 14$ см, $LM = 16$ см, $KM = 10$ см.

- 1) Побудуйте переріз, що проходить через середини ребер QK , QL , QM цього тетраедра.
- 2) Знайдіть периметр отриманого перерізу.

3 7. Скільки площин можна провести через точки A , B і C , якщо:

- 1) $AB = 20$ мм, $BC = 0,7$ дм, $AC = 5$ см;
- 2) $AB = 5$ см, $BC = 30$ мм, $AC = 0,06$ м?

8. Точки K і L належать грані ABC , а точка D – грані QAC тетраедра $QABC$ (мал. 2.43). Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте переріз тетраедра площиною DKL .



Мал. 2.43

4 9. Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $AA_1 = 6$ см. Знайдіть площу перерізу даного прямокутного паралелепіпеда площиною, що проходить через пряму BD і точку N – середину AA_1 .

Додаткові завдання

3 10. Пряма l перетинає сторони AB і AD трапеції $ABCD$. Чи можна стверджувати, що пряма l належить площині трапеції?

4 11. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Побудуйте його переріз площиною MNK , де точки M , N і K – середини ребер AD , DC і BB_1 відповідно.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

1 1. 1) Намалюйте площину α та точки A і B , які належать площині α .

2) Скільки існує точок, крім A і B , які належать площині α ?

2. 1) Намалюйте площину α , що проходить через дві прямі m і n , які перетинаються.

2) Позначте на малюнку точку K , що належить площині α , але не належить жодній з прямих m і n .

3) Позначте на малюнку точку P , що не належить площині α .

4) Позначте на малюнку точку M , що належить прямій m . Чи належить точка M площині α ?

2 3. Скільки різних площин можна провести через:

1) дві довільні точки;

2) три точки, що не лежать на одній прямій;

3) чотири точки, що лежать на одній прямій;

4) довільну пряму?

4. Точки A , B і C – вершини трикутника, точка N не належить площині ABC . Чи лежить у цій площині:

1) середина відрізка AB ;

2) середина відрізка BN ;

3) бісектриса CK трикутника ABC ?

5. Точка D не належить площині, що проходить через прямі AC і AB . Доведіть, що прямі BC і AD не перетинаються.

6. Через середини сторін AB і AC трикутника ABC проведено площину α . Чи можна стверджувати, що α і площина ABC збігаються?

7. (Задача-жарт.) О 12 год з поверхні бутерброда злетіло три мухи. Через який час вони знову опиняться в одній площині?

3 8. Точка O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC . Чи можна стверджувати, що точка C належить площині α , якщо цій площині належать точки A , B і O ?

9. Дві сусідні вершини чотирикутника $ABCD$ і точка перетину його діагоналей належать площині α . Доведіть, що площині α належать і дві інші вершини чотирикутника.

10. Площини α і β перетинаються по прямою s . Пряма a належить площині α і перетинає площину β в точці N . Чи належить точка N прямою s ? Відповідь обґрунтуйте.

11. Чи можна стверджувати, що всі точки кола належать площині α , якщо:

1) дві точки кола належать площині α ;

2) якщо точка кола і центр кола належать площині α ;

3) якщо дві точки кола і центр кола належать площині α ;

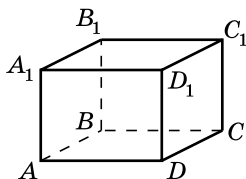
4) якщо три точки кола належать площині α ?

12. Дано пряму і точку, що їй не належить. Доведіть, що всі прямі, які проходять через дану точку та перетинають дану пряму, лежать в одній площині.

13. Скільки площин можна провести через точки A , B і C , якщо:
- 1) $AB = 2a$, $BC = 3a$, $AC = a$;
 - 2) $AB = 7b$, $BC = 5b$, $AC = 10b$?
- 4 14. Три площини мають спільну точку. Скільки різних прямих може утворитися при перетині цих площин? Укажіть і обґрунтуйте всі можливі випадки.
15. Площина α перетинає прямі SA , SB і SC у точках A_1 , B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що прямі SA , SB і SC лежать в одній площині тоді й тільки тоді, коли точки A_1 , B_1 і C_1 лежать на одній прямій.

До § 2

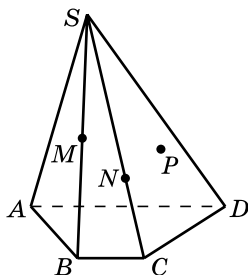
- 1 16. На малюнку 2.44 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- 1) Назвіть будь-які дві точки, які не належать площині ABC .
 - 2) Назвіть будь-яку точку, яка належить площині $AA_1 B_1$, але не належить прямій AA_1 .
 - 3) Назвіть будь-які дві прямі, які перетинають площину $DD_1 C_1$.
 - 4) Назвіть площину, яка проходить через точку B_1 і пряму $D_1 C_1$.



Мал. 2.44

17. Побудуйте два будь-яких діагональних перерізи шестикутної піраміди.
- 2 18. На малюнку 2.44 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Назвіть:
- 1) пряму, по якій перетинаються площини ABC і $A_1 AD_1$;
 - 2) площину, що проходить через прямі DC_1 і CD .
19. Побудуйте переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через вершини A , C і B_1 . Знайдіть периметр цього перерізу, якщо сторона куба дорівнює 1 дм.
20. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди $QABCD$ площиною, що проходить через діагональ основи AC і середину ребра QB .

- 3 21. $SABCD$ – чотирикутна піраміда (мал. 2.45), точка P належить грані SCD .



Мал. 2.45

- 1) Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте точку перетину прямої MN з

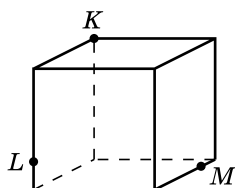
площиною ABC та точку перетину прямої SP з площиною ABC .

2) Доведіть, що прямі MN і SP не перетинаються.

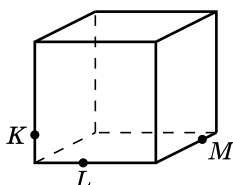
22. $QABC$ – трикутна піраміда. Точка P – середина AC , $K \in BC$, $L \in AQ$. Побудуйте переріз піраміди площиною PKL , якщо точка K не є серединою BC .

23. 1) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середини трьох його ребер, які виходять з однієї вершини.
2) Знайдіть площу цього перерізу, якщо ребро куба дорівнює $2a$ см.

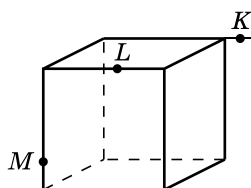
24. Точки K , L і M належать ребрам куба або їх продовженням (мал. 2.46–2.48). Перенесіть малюнки в зошит і побудуйте на кожному з них переріз куба площиною KLM .



Мал. 2.46



Мал. 2.47

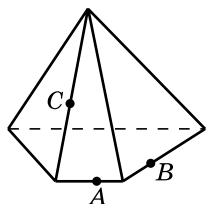


Мал. 2.48

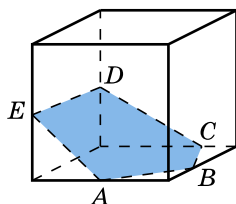
4 25. $SABCD$ – чотирикутна піраміда (мал. 2.45). Прямі MN і BC – не паралельні. Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте прямі перетину площин MNP і SCD , MND і ABC .

26. Перенесіть малюнок 2.49 у зошит і побудуйте переріз піраміди площиною ABC .

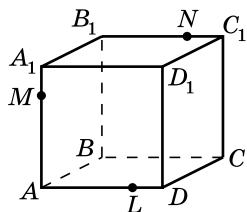
27. Учень побудував переріз прямокутного паралелепіпеда площиною (мал. 2.50). Чи є помилки на малюнку?



Мал. 2.49



Мал. 2.50



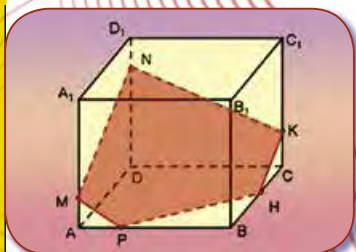
Мал. 2.51

28. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб з ребром 5 см (мал. 2.51). Точка M належить ребру AA_1 , точка N – ребру $B_1 C_1$, точка L – ребру AD , причому $A_1 M = DL = C_1 N = 1$ см.

1) Побудуйте переріз куба площиною MLN .

2) Обчисліть периметр отриманого перерізу.

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- *пригадаєте* взаємне розміщення прямих і площин у просторі;
- *дізнаєтеся* про паралельне проектування та його властивості, ознаки мимобіжних прямих, паралельності прямої і площини, паралельності площин;
- *навчитися* класифікувати взаємне розміщення прямих, прямих і площин, площин у просторі; установлювати паралельність прямих, прямої і площини, площин; установлювати мимобіжність прямих; будувати зображення фігур і перерізи многогранників методом слідів та методом внутрішнього проєціювання.

§ 3. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

1. Прямі у просторі

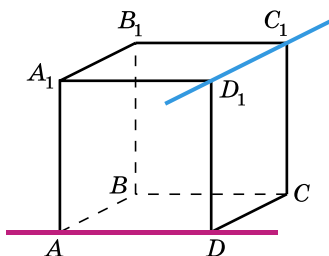
З курсу планіметрії вам відомо, що для двох прямих на площині є лише два випадки взаємного розміщення: вони або перетинаються, або паралельні. Оскільки в просторі існують площини і в цих площинах справджуються планіметричні властивості, то згадані випадки взаємного розміщення прямих зберігаються також і у просторі.

Проте у просторі можливий ще один випадок розміщення прямих. Розглянемо куб (мал. 3.1). Прямі AD і D_1C_1 не мають спільних точок і не паралельні. У такому випадку кажуть, що *дві прямі не лежать в одній площині*, тобто не існує жодної площини, яка проходила б через обидві ці прямі.



Дві прямі, які не лежать в одній площині, називають *мимобіжними*.

На малюнку 3.1 прямі AD і D_1C_1 – мимобіжні. Наочне уявлення про мимобіжні прямі дають дві дороги, одна з яких проходить по мосту, а друга під мостом (мал. 3.2).



Мал. 3.1



Мал. 3.2

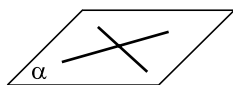
Нагадаємо, що планіметрія – це геометрія на площині, а отже, усі фігури належать цій одній площині. Натомість у стереометрії розглядають не одну, а безліч площин, тому фігури можуть належати різним площинам. Отже, означення *паралельних прямих* у стереометрії в порівнянні з означенням паралельних прямих на площині потребує уточнення.



Дві прямі у просторі називають *паралельними*, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.

Паралельність прямих a і b позначають, як і у планіметрії:
 $a \parallel b$.

Отже, у просторі є три випадки взаємного розміщення двох прямих:



Мал. 3.3



Мал. 3.4

1) прямі лежать в одній площині і мають спільну точку, тобто це прямі, що перетинаються (мал. 3.3);

2) прямі лежать в одній площині і не мають спільних точок, тобто це паралельні прямі (мал. 3.4);

3) прямі не лежать в одній площині, тобто це мимобіжні прямі.

Прикладами всіх зазначених випадків розміщення прямих можуть бути прямі перетину стін кімнати між собою та зі стелею і підлогою, або прямі, що містять ребра куба. Так, на малюнку 3.1 прямі AB і BC перетинаються в точці B , прямі AD і BC – паралельні, прямі AD і D_1C_1 – мимобіжні.

2. Паралельні прямі у просторі

З означення паралельних прямих випливає, що через дві паралельні прямі можна провести площину.

Ця площина єдина. Якщо припустити, що через паралельні прямі a і b можна провести дві різні площини, то це означатиме, що дві різні площини проведено через пряму a і деяку точку M прямої b . А це суперечить теоремі про існування і єдиність площини, що проходить через пряму і точку, яка їй не належить. Отже,



через дві паралельні прямі можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Тепер до трьох способів задання площини, які ми розглянули в § 1 (с. 11), можна додати ще один: *площину можна задавати двома паралельними прямими.*

Як відомо з курсу планіметрії, на площині через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній (аксіома VIII, с. 9). Така сама властивість справджується і у просторі.



Теорема 1 (про існування прямої, паралельної даній). Через будь-яку точку простору, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.



Мал. 3.5

Доведення. Розглянемо пряму a і точку M , що їй не належить (мал. 3.5). Через пряму a і точку M можна провести єдину площину, назовемо її α . У площині α справ-

джується аксіома паралельності прямих, тобто через точку M можна провести єдину пряму b , паралельну прямій a . Отже, у просторі через точку M , що не належить даній прямій a , можна провести єдину пряму, паралельну прямій a . ■

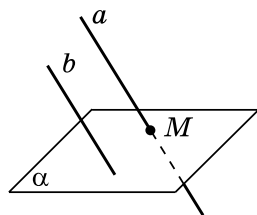
Сформулюємо й доведемо властивість паралельних прямих.



Теорема 2 (про перетин площини паралельними прямими). Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то і друга пряма перетинає цю площину.

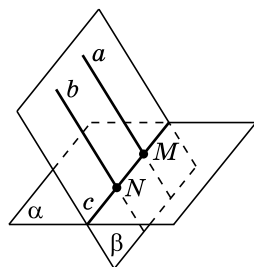
Доведення. Нехай $a \parallel b$ і пряма a перетинає площину α в точці M (мал. 3.6). Доведемо, що пряма b також перетинає площину α , тобто має з нею одну спільну точку.

1) Оскільки $a \parallel b$, то через ці прямі можна провести площину β . Оскільки α і β мають спільну точку – точку M , то вони перетинаються по прямій. Позначимо цю пряму через c (мал. 3.7). Вона належить площині β і перетинає пряму a у точці M , тому вона перетинає і пряму b , паралельну a , у деякій точці N . Оскільки $N \in c$, $c \subset \alpha$, то $N \in \alpha$. Отже, точка N – спільна точка прямої b і площини α .



Мал. 3.6

2) Доведемо, що пряма b не має з площиною α інших спільних точок. Припустимо, що пряма b має з площиною α ще одну спільну точку. Тоді дві точки прямої b належать площині α , а тому пряма b належить площині α . Оскільки пряма b належить і площині β , то пряма b є прямою перетину площин α і β , тобто збігається з прямою c . Це неможливо, оскільки прямі c і a перетинаються в точці M , а за умовою b і a – паралельні. Отже, наше припущення хибне, тому пряма b має з площиною α тільки одну спільну точку – точку N . ■



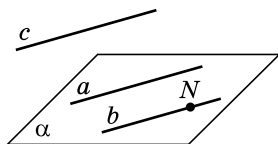
Мал. 3.7

З курсу планіметрії ви знаєте, що на площині дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні між собою. Ця властивість справджується і у просторі.



Теорема 3 (ознака паралельності прямих). Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

Доведення. Нехай $a \parallel c$ і $b \parallel c$. Доведемо, що $a \parallel b$.



Мал. 3.8

1) Позначимо точку N на прямій b та проведемо через точку N і пряму a площину α (мал. 3.8). Доведемо, що $b \subset \alpha$. Припустимо, що пряма b перетинає площину α (у точці N). Тоді за попереднього теоремою площину α також перетинає і пряма c , яка паралельна прямій b .

Оскільки $a \parallel c$ і c перетинає α , то за попереднього теоремою пряма a також перетинає α . Але це неможливо, оскільки $a \subset \alpha$. Отже, наше припущення хибне, тому $b \subset \alpha$.

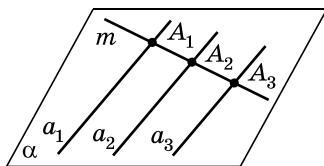
2) Припустимо, що a і b перетинаються в деякій точці. Тоді через цю точку проходять дві прямі, a і b , паралельні прямій c , що суперечить теоремі про існування прямої, паралельної даній.

3) Отже, прямі a і b лежать в одній площині і не перетинаються. Тому вони паралельні. ■

Задача 1. Довести, що всі паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині.

Доведення. 1) Нехай паралельні прямі a_1 і a_2 перетинають пряму m в точках A_1 і A_2 відповідно (мал. 3.9). Проведемо через прямі a_1 і a_2 площину α . Оскільки $A_1 \in \alpha$ і $A_2 \in \alpha$, то $m \subset \alpha$.

2) Проведемо пряму a_3 , яка паралельна a_1 і a_2 і перетинає пряму m у точці A_3 . Доведемо, що $a_3 \subset \alpha$. Припустимо, що пряма a_3 має з площиною α лише одну спільну точку – A_3 , тобто пряма a_3 перетинає площину α .



Мал. 3.9

Оскільки $a_1 \parallel a_3$ і пряма a_3 перетинає α , то за теоремою про перетин площини паралельними прямими отримаємо, що пряма a_1 перетинає площину α . Але це суперечить тому, що пряма a_1 належить α . Отже, наше припущення хибне, тому $a_3 \subset \alpha$.

3) Оскільки a_3 – довільна пряма, яка паралельна прямим a_1 і a_2 і перетинає пряму m , то всі паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині, а саме, в площині α . ■

Задача 2. Через кінець A відрізка AB проведено площину α .

Через кінець B і точку M цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і M_1 відповідно (мал. 3.10). Знайти довжину відрізка MM_1 , якщо $BB_1 = 15$ см і $BM : MA = 1 : 2$.

Розв'язання. 1) $BB_1 \parallel MM_1$, тому через прямі BB_1 і MM_1 можна провести площину, назовемо її β .

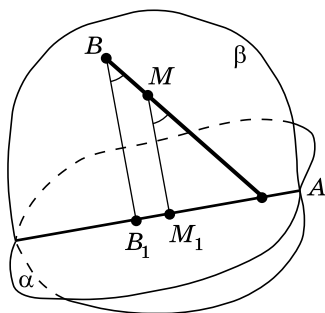
2) Площини α і β перетинаються по прямої B_1M_1 , $A \in \alpha$. Оскільки $A \in BM$, $BM \subset \beta$, то $A \in \beta$. Отже, $A \in \alpha$, $A \in \beta$, $\alpha \cap \beta = B_1M_1$, тому $A \in B_1M_1$.

3) Розглянемо $\triangle AMM_1$ і $\triangle ABB_1$, у яких $\angle ABB_1 = \angle AMM_1$ (як відповідні кути при паралельних прямих BB_1 і MM_1 та січній AB), кут A – спільний. Тоді $\triangle AMM_1 \sim \triangle ABB_1$ (за двома

кутами), тому $\frac{AM}{AB} = \frac{MM_1}{BB_1}$.

4) Оскільки за умовою $BM : MA = 1 : 2$, позначимо $BM = x$ (см), $MA = 2x$ (см). Тоді $AB = BM + MA = x + 2x = 3x$ (см). Маємо: $\frac{2x}{3x} = \frac{MM_1}{15}$, тобто $MM_1 = \frac{2 \cdot 15}{3}$, отже, $MM_1 = 10$ (см).

Відповідь. 10 см.



Мал. 3.10

Зауважимо, що паралельними бувають не лише прямі, а й промені та відрізки. Відрізки або промені називають *паралельними*, якщо вони лежать на паралельних прямих.

Важливо також зауважити, що у стереометрії паралельні прямі на площині зображують паралельними прямими (більш докладно про це – в одному з найближчих параграфів). Проте прямі, що зображені паралельними на малюнку, у просторі можуть бути і не паралельними (див. задачу 5 цього параграфа).

3. Мимобіжні прямі

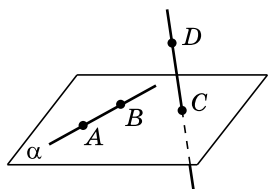
З'ясуємо, як встановити, що прямі є мимобіжними, не використовуючи означення. Доведемо теорему, що є *ознакою мимобіжності прямих*.



Теорема 4 (ознака мимобіжності прямих). Якщо одна з двох прямих лежить у деякій площині, а друга пряма перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то ці дві прямі мимобіжні.

Доведення. Нехай пряма AB належить площині α , а пряма CD перетинає цю площину в точці C (мал. 3.11). Доведемо, що прямі AB і CD – мимобіжні.

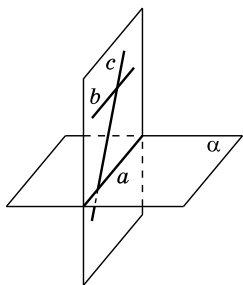
Припустимо, що прямі AB і CD не є мимобіжними, тобто лежать у деякій площині β . Тоді площина β визначається прямою AB і точкою C , яка не належить цій прямій. Але така



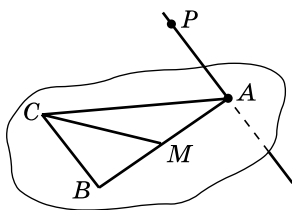
Мал. 3.11

площина, що проходить через пряму AB і точку C уже існує, це площина α . А оскільки така площина єдина, то β збігається з α . Проте це неможливо, адже пряма CD , за умовою, не належить площині α . Прийшли до протиріччя з умовою. Отже, наше припущення є хибним. Тому прямі AB і CD – мимобіжні. ■

Зауважимо, що коли одна з двох прямих лежить у площині α , а друга не лежить у цій площині, то ці прямі не обов'язково мимобіжні. Наприклад, на малюнку 3.12 $a \subset \alpha$, $b \not\subset \alpha$, $c \not\subset \alpha$, але a і b – не є мимобіжними (вони паралельні), a і c також не є мимобіжними (вони перетинаються).



Мал. 3.12



Мал. 3.13

Задача 3. Точка P не лежить у площині трикутника ABC , CM – медіана цього трикутника. Яким є взаємне розміщення прямих CM і AP ?

Розв'язання. Оскільки $CM \in (ABC)$, $AP \cap (ABC) = A$, $A \notin CM$ (мал. 3.13), то прямі CM і AP – мимобіжні (за ознакою мимобіжності прямих).

Відповідь. Прямі мимобіжні.

Для доведення мимобіжності прямих часто використовують метод від супротивного.

Задача 4. Прямі AB і CD мимобіжні. Довести, що прямі AD і BC також мимобіжні.

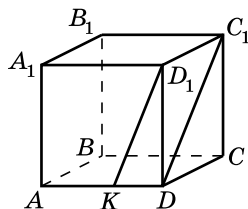
Доведення. Припустимо, що прямі AD і BC не є мимобіжними, тобто або паралельні, або перетинаються. Тоді в кожному із цих двох випадків через прямі AD і BC можна провести площину, і тому всі чотири точки A , B , C , D бу-

дуть належати цій площині. Але тоді прямі AB і CD – не будуть мимобіжними, що суперечитиме умові задачі. Отже, наше припущення, що прямі AD і BC не є мимобіжними, є хибне, а тому прямі AD і BC – мимобіжні. ■



Задача 5. Точка K належить ребру AD

- куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (мал. 3.14). На малюнку прямі KD_1 і DC_1 паралельні.
- А чи паралельні вони насправді?
- Розв'язання. Пряма $C_1 D$ належить площині грані куба $CDD_1 C_1$, а пряма KD_1 перетинає цю грань у точці D_1 . Тому, за ознакою мимобіжності прямих, прямі KD_1 і DC_1 – мимобіжні.



Мал. 3.14

Відповідь. Ні.



- Які дві прямі називають мимобіжними? • Які дві прямі у просторі називають паралельними? • Назвіть усі випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі. • Сформулюйте й доведіть теорему про існування прямої, паралельної даній. • Сформулюйте й доведіть теорему про перетин площини паралельними прямими. • Сформулюйте й доведіть ознаку паралельності прямих. • Сформулюйте й доведіть ознаку мимобіжності прямих.



Графічна робота № 2

Виконайте малюнки до тверджень і підпишіть точки, прямі та площини на отриманих малюнках.

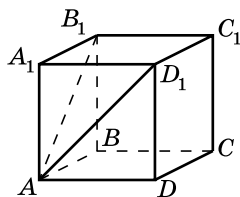
1. Прямі a і b належать площині α і перетинаються.
2. Прямі a і b належать площині β і не мають спільних точок.
3. Прямі AB і CD такі, що точка A не належить площині $B CD$, а точка B не належить прямій CD .
4. Площина α перетинає паралельні прямі c , d і m у точках C , D і M , що належать одній прямій.
5. Площина β перетинає паралельні прямі c , d і m у точках C , D і M , що є вершинами трикутника.
6. На прямій m , що перетинає площину α в точці A , вибрано по різні боки від точки A точки M_1 і M_2 . Прямі $M_1 N_1$ і $M_2 N_2$ паралельні між собою та перетинають площину α в точках N_1 і N_2 .
7. Вершини B і C трикутника ABC належать площині γ , а вершина A – їй не належить. Пряма m перетинає сторону AB трикутника в точці M , сторону AC – у точці N , а площину γ – у точці K .



Розв'яжіть задачі та вправи

1 3.1. На малюнку 3.15 зображено куб. Яким є взаємне розміщення прямих:

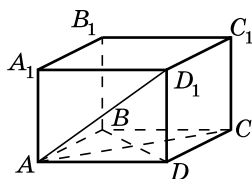
- 1) AB і AB_1 ; 2) AD і BC ;
- 3) AD_1 і BC ; 4) DD_1 і CC_1 ;
- 5) A_1D_1 і B_1A_1 ; 6) D_1C_1 і BC ?



Мал. 3.15

3.2. На малюнку 3.16 зображено прямокутний паралелепіпед. Яким є взаємне розміщення прямих:

- 1) AB і CD ; 2) AC і BD ;
- 3) AD і A_1D_1 ; 4) AC і AD_1 ;
- 5) BB_1 і DD_1 ; 6) A_1D_1 і DC ?



Мал. 3.16

3.3. (Усно.) Скільки різних площин можна провести:

- 1) через дві прями, що перетинаються;
- 2) через дві паралельні прями;
- 3) через дві мимобіжні прями?

3.4. Прямі a і b не паралельні і не перетинаються. Скільки різних площин можна провести через ці дві прями?

2 3.5. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 3.17). Доведіть, що $AD \parallel B_1 C_1$.

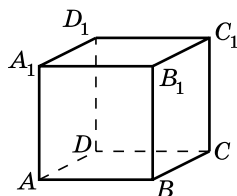
3.6. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб (мал. 3.17). Доведіть, що $DC \parallel A_1 B_1$.

3.7. Пряма MN , що не лежить у площині ромба $ABCD$, паралельна стороні AB цього ромба. З'ясуйте взаємне розміщення прямих: 1) MN і CD ; 2) AM і CD .
Відповідь обґрунтуйте.

3.8. Пряма KL , що не лежить у площині квадрата $ABCD$, паралельна стороні BC цього квадрата. З'ясуйте взаємне розміщення прямих: 1) KL і AD ; 2) LB і CD .
Відповідь обґрунтуйте.

3.9. Прямі m і n не паралельні, пряма a паралельна прямій m . Чи можна стверджувати, що пряма a перетинає пряму n :
1) на площині; 2) у просторі?

3.10. Чи можна стверджувати, що пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає й другу:
1) на площині; 2) у просторі?



Мал. 3.17

- 3.11.** Точки A , B , C і D не лежать в одній площині. Чи можуть прямі AB і CD :
- 1) бути паралельними;
 - 2) перетинатися;
 - 3) бути мимобіжними?
- Відповідь обґрунтуйте.
- 3.12.** Точки A , B , C і D лежать в одній площині. Чи можуть прямі AB і CD :
- 1) бути паралельними;
 - 2) перетинатися;
 - 3) бути мимобіжними?
- Відповідь обґрунтуйте.
- 3.13.** Намалюйте куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і виділіть ребро CC_1 цього куба кольоровим олівцем. Запишіть усі ребра куба, які:
- 1) паралельні ребру CC_1 ;
 - 2) перетинають ребро CC_1 ;
 - 3) мимобіжні з ребром CC_1 .
- 3.14.** Намалюйте прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і виділіть ребро CD цього куба кольоровим олівцем. Запишіть усі ребра куба, які:
- 1) паралельні ребру CD ;
 - 2) перетинають ребро CD ;
 - 3) мимобіжні з ребром CD .
- 3.15.** Намалюйте прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і виділіть діагональ AC грані $ABCD$ кольоровим олівцем. Запишіть усі прямі, що містять діагоналі інших п'яти граней паралелепіпеда (усього 10 діагоналей), які:
- 1) паралельні прямій AC ;
 - 2) перетинають пряму AC ;
 - 3) мимобіжні з прямою AC .
- 3.16.** Намалюйте куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і виділіть діагональ $A_1 B$ грані $ABB_1 A_1$ кольоровим олівцем. Запишіть усі прямі, що містять діагоналі інших п'яти граней (усього 10 діагоналей), які:
- 1) паралельні прямій $A_1 B$;
 - 2) перетинають пряму $A_1 B$;
 - 3) мимобіжні з прямою $A_1 B$.
- 3.17.** Через кінці A , B і середину M відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину α в точках A_1 , B_1 і M_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка MM_1 , якщо $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 4$ см і відрізок AB не перетинає площину α .
- 3.18.** Через кінець A відрізка AB проведено площину α . Через кінець B і середину C цього відрізка проведено паралельні

прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка BB_1 , якщо $CC_1 = 7$ см.

3.19. Прямі a і b – паралельні. Пряма c перетинає пряму a і не перетинає пряму b . Доведіть, що прямі b і c – мимобіжні.

3.20. Прямі m і n – перетинаються, пряма a паралельна прямій m і не перетинає пряму n . Доведіть, що прямі n і a – мимобіжні.

3.21. Пряма n , яка не лежить у площині трикутника ABC , перетинає його сторону BC в точці K .

1) Чи може пряма n перетинати сторону AB ?

2) Яким є взаємне розміщення прямих n і AC ?

Відповіді обґрунтуйте.

3.22. Пряма m проходить через вершину A трикутника ABC і не лежить у площині цього трикутника. BM – медіана трикутника.

1) Чи може пряма m перетинати сторону BC ?

2) Яким є взаємне розміщення прямих m і BM ?

Відповіді обґрунтуйте.

3.23. (Усно.) У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (мал. 3.18) K – середина AB , L – середина AA_1 . Яким є взаємне розміщення прямих:

1) AB і KL ;

2) BB_1 і KL ;

3) $A_1 D_1$ і KL ;

4) $C_1 A_1$ і AB ;

5) $A_1 C_1$ і BB_1 ;

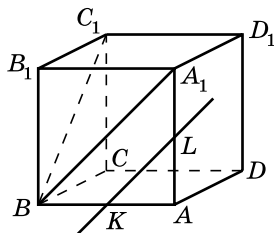
6) $A_1 C_1$ і $A_1 D_1$;

7) $C_1 B$ і AB ;

8) $C_1 B$ і BB_1 ;

9) $C_1 B$ і $A_1 D_1$;

10) KL і $A_1 B$?

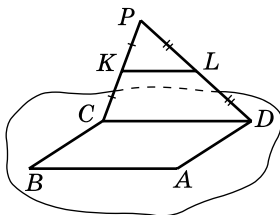


Мал. 3.18

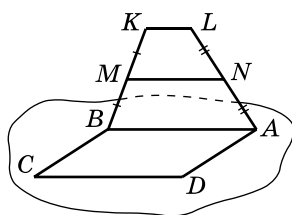
3.24. Паралелограм $ABCD$ і трикутник CDP не лежать в одній площині (мал. 3.19), K – середина CP , L – середина PD .

1) Доведіть, що $KL \parallel AB$.

2) Знайдіть KL , якщо $AB = 8$ см.



Мал. 3.19

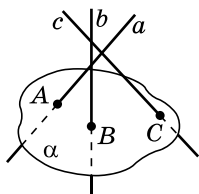


Мал. 3.20

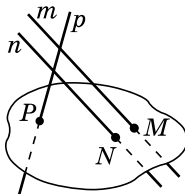
3.25. Паралелограм $ABCD$ і трапеція $ABKL$, у якої $AB \parallel KL$, не лежать в одній площині (мал. 3.20), M – середина BK , N – середина AL .

- 1) Доведіть, що $MN \parallel CD$.
 - 2) Знайдіть MN , якщо $CD = 10$ см, $KL = 4$ см.
- 3.26.** Точки M і N належать прямій a , а точки K і L – прямій b , причому $a \parallel b$. Чи можуть прямі KM і LN :
- 1) перетинатися;
 - 2) бути паралельними;
 - 3) бути мимобіжними?
- 3.27.** Точки A і B належать прямій m , а точки C і D – прямій n , причому m і n перетинаються. Чи можуть прямі AC і BD :
- 1) перетинатися;
 - 2) бути паралельними;
 - 3) бути мимобіжними?
- 3.28.** Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.
- 1) Яким є взаємне розміщення прямих AD і CC_1 ?
 - 2) Чи існують прямі, що належать площині CDD_1 і перетинають кожен з прямих AD і CC_1 ?
 - 3) Якщо прямі, зазначені в попередньому пункті, існують, то вкажіть, скільки їх.
- 3.29.** Пряма a належить площині α , а пряма b паралельна прямій a та має з площиною α спільну точку C . Доведіть, що $b \subset \alpha$.
- 3.30.** Прямі a і b паралельні, $a \subset \alpha$. Чи може пряма b перетинати площину α ?
- 3** **3.31.** Дано чотири попарно паралельні прямі a , b , c і d , жодні три з яких не лежать в одній площині. Намалюйте всі площини, що проходять через кожні дві з даних прямих. Скільки таких площин можна провести?
- 3.32.** Дано три попарно паралельні прямі m , n і k , що не лежать в одній площині. Намалюйте всі площини, що проходять через кожні дві з даних прямих. Скільки таких площин можна провести?
- 3.33.** Прямі a і b перетинаються. Яким може бути взаємне розміщення прямих b і c , якщо прямі a і c :
- 1) паралельні;
 - 2) перетинаються;
 - 3) мимобіжні?
- До кожного можливого розміщення виконайте відповідний малюнок. Якщо розміщення неможливе, доведіть це.
- 3.34.** Прямі a і c паралельні. Як можуть бути розміщені прямі b і c , якщо прямі a і b :
- 1) паралельні;
 - 2) перетинаються;
 - 3) мимобіжні?
- До кожного можливого розміщення виконайте відповідний малюнок. Якщо розміщення неможливе, доведіть це.
- 3.35.** Три прямі розміщено так, що кожні дві з них перетинаються. Чи лежать ці три прямі в одній площині? Відповідь обґрунтуйте.

- 3.36. Прямі a і b мимобіжні, $c \parallel a$, $d \parallel b$. Чи правильно, що прямі c і d мимобіжні?
- 3.37. Відомо, що $a \parallel b$, $c \parallel a$, $d \parallel b$. Чи правильно, що $c \parallel d$?
- 3.38. Через кінець C відрізка CD проведено площину α . Через кінець D і точку A цього відрізка проведено паралельні прямі, що перетинають площину α в точках D_1 і A_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка AA_1 , якщо $DD_1 = 12$ см і $CA : AD = 3 : 1$.
- 3.39. Через кінець M відрізка MN проведено площину β . Через кінець N і точку B цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину β в точках N_1 і B_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка NN_1 , якщо $MB : BN = 3 : 2$ і $BB_1 = 15$ см.
- 3.40. Доведіть, що середини ребер AQ , CQ , BC і AB тетраедра $QABC$ лежать в одній площині. Визначте вид фігури, вершинами якої є ці точки.
- 3.41. Дано два паралелограми $ABCD$ і $ABMN$, які не лежать в одній площині. Доведіть, що $\triangle AND = \triangle BCM$.
- 3.42. Трикутник KLM належить площині α . Через його вершини проведено паралельні прямі, які перетинають площину α . На цих прямих по один бік від площини α відкладено рівні між собою відрізки KK_1 , LL_1 і MM_1 . Доведіть, що $\triangle KLM = \triangle K_1L_1M_1$.
- 3.43. На малюнку 3.21 прямі a , b і c попарно перетинаються і перетинають площину α відповідно в точках A , B і C .
- 1) Чи є помилки на малюнку?
 - 2) Якщо так, виконайте малюнок правильно.



Мал. 3.21



Мал. 3.22

- 3.44. На малюнку 3.22 прямі m і n паралельні, а пряма p перетинає кожну з прямих m і n . Прямі m , n і p перетинають площину β відповідно в точках M , N і P .
- 1) Чи є помилки на малюнку?
 - 2) Якщо так, виконайте малюнок правильно.
- 3.45. Дано дві мимобіжні прямі a і b . Точки A_1 і A_2 належать прямій a , а точки B_1 і B_2 – прямій b . Чи можуть від-

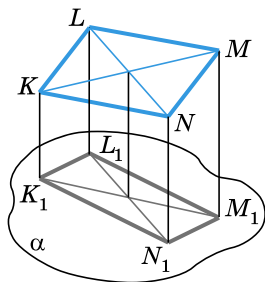
різки A_1B_1 і A_2B_2 мати спільну середину? Відповідь обґрунтуйте.

- 3.46.** Дано дві мимобіжні прямі a і b . Точки A_1 і A_2 належать прямій a , а точки B_1 і B_2 – прямій b . Точка B_1 – середина відрізка A_1C_1 , а точка B_2 – середина відрізка A_2C_2 . Чи можуть точки C_1 і C_2 збігатися? Відповідь обґрунтуйте.
- 3.47.** Площини α і β перетинаються по прямій m , $A \in \alpha$, $A \notin m$, $B \in \beta$, $B \notin m$. Доведіть, що прямі AB і m – мимобіжні.
- 3.48.** $ABCD$ – паралелограм, $P_{ABCD} = 40$ см. Точка N не належить площині паралелограма. Знайдіть $P_{A_1B_1C_1D_1}$, де A_1 , B_1 , C_1 , D_1 – середини відрізків NA , NB , NC і ND відповідно.
- 3.49.** Точка M не лежить у площині квадрата $ABCD$, $AB = 3$ см. Знайдіть $P_{A_1B_1C_1D_1}$, де A_1 , B_1 , C_1 , D_1 – середини відрізків MA , MB , MC і MD відповідно.
- 3.50.** Скільки існує прямих, паралельних прямій a , кожна з яких має принаймні одну спільну точку з прямою b , якщо прямі a і b :
- 1) перетинаються; 2) паралельні; 3) мимобіжні?
- 3.51.** Дано дві мимобіжні прямі a і b та точку M , що не належить жодній з них. Через точку M проведіть пряму m , що перетинає прямі a і b . Чи завжди цю задачу можна розв'язати?
- 3.52.** Дано дві мимобіжні прямі a і b та пряму c , що перетинає як пряму a , так і пряму b . Доведіть, що будь-яка пряма, паралельна прямій c , є мимобіжною принаймні з однією з прямих a або b .
- 3.53.** $ABCD A_1B_1C_1D_1$ – куб, $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7$ – середини його ребер $AB, BC, BB_1, CC_1, DD_1, A_1B_1$ і A_1D_1 відповідно. Яким є взаємне розміщення прямих:
- 1) K_1K_2 і K_3K_4 ; 2) K_2K_3 і K_6K_7 ;
 - 3) K_2K_3 і K_5K_7 ; 4) K_5K_7 і K_3K_6 ;
 - 5) K_2K_5 і K_3K_7 ; 6) K_1K_2 і K_4K_5 ?
- 3.54.** $QABC$ – тетраедр, точки $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ – середини ребер AQ, AB, BC, CQ, QB і AC відповідно. Яким є взаємне розміщення прямих:
- 1) AQ і BC ; 2) M_1M_5 і BC ;
 - 3) M_2M_5 і M_3M_4 ; 4) M_3M_4 і M_1M_5 ;
 - 5) M_2M_4 і M_1M_5 ; 6) M_2C і M_3M_6 ;
 - 7) M_1M_2 і M_5M_6 ; 8) M_5M_6 і M_2M_4 ?

- 4 3.55.** Через кінці A, B і середину M відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину β в точках A_1, B_1 і M_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка BB_1 , якщо $AA_1 = 9$ см, $MM_1 = 1$ см, $AA_1 > BB_1$ і відрізок AB перетинає площину β .

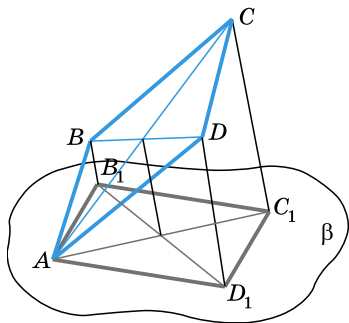
- 3.56.** Через кінці M, N і середину A відрізка MN проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину α в точках M_1, N_1 і A_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка AA_1 , якщо $NN_1 = 10$ см, $MM_1 = 2$ см і відрізок MN перетинає площину α .

- 3.57.** Паралелограм $KLMN$ не перетинає площину α (мал. 3.23). Через його вершини K, L, M і N проведено паралельні прямі, що перетинають площину α в точках K_1, L_1, M_1 і N_1 відповідно. Знайдіть KK_1 , якщо $LL_1 = 8$ см, $MM_1 = 12$ см, $NN_1 = 9$ см.

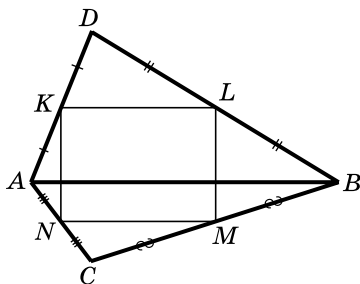


Мал. 3.23

- 3.58.** Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено площину β так, що вершини B, C і D їй не належать (мал. 3.24). Через точки B, C і D проведено паралельні прямі, що перетинають площину β у точках B_1, C_1 і D_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка CC_1 , якщо $BB_1 = 2$ см, $DD_1 = 10$ см.



Мал. 3.24

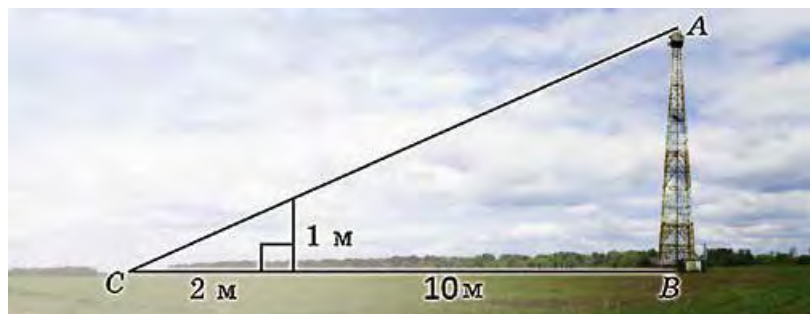


Мал. 3.25

- 3.59.** Трикутники ABC і ABD не лежать в одній площині (мал. 3.25). Точки K, L, M і N – середини відрізків AD, BD, CB і AC відповідно.

- 1) Визначте вид чотирикутника $KLMN$.
- 2) Знайдіть P_{KLMN} , якщо $AB = a$ см, $CD = b$ см.

- 3.60.** $QABC$ – правильний тетраедр з ребром завдовжки 12 см. Точки K_1, K_2, L_1, L_2 – середини ребер AQ, CQ, AB і CB відповідно. Знайдіть довжину відрізка прямої перетину площин BK_1K_2 і QL_1L_2 , що міститься всередині тетраедра.
- 3.61.** Точка D не лежить у площині трикутника ABC , K – середина AB , L – середина CD , M – точка перетину медіан (центроїд) трикутника ABC .
- 1) Чи може фігура $ADLB$ бути трапецією?
 - 2) Доведіть, що прямі MD і KL перетинаються.
 - 3) У якому відношенні, рахуючи від точки D , пряма KL ділить відрізок DM ?
- 3.62.** Точка D не лежить у площині трикутника ABC , M_1 – центроїд трикутника ABC , M_2 – центроїд трикутника DBC .
- 1) Визначте взаємне розміщення прямих DM_1 і AM_2 .
 - 2) У якому відношенні, рахуючи від точки D , пряма AM_2 ділить відрізок DM_1 ?
- 3.63.** Трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$) не перетинає площину α , $BC = 0,5AD$, точка K – точка перетину діагоналей трапеції. Через усі вершини трапеції і точку K проведено паралельні прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 і KK_1 , точки A_1, B_1, C_1, D_1, K_1 належать площині α . Знайдіть KK_1 і CC_1 , якщо $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 4$ см, $DD_1 = 7$ см.
- 3.64.** Трикутник ABC і площина α не мають спільних точок. Точка N – середина AC , точка M – центроїд трикутника. Через точки A, B, C, N і M проведено паралельні прямі, що перетинають площину α у точках A_1, B_1, C_1, N_1 і M_1 відповідно. Знайдіть KK_1 і CC_1 , якщо $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 11$ см, $MM_1 = 7$ см.
-  **3.65.** Дано правильний тетраедр $A_1A_2A_3A_4$, ребро якого має довжину a см, M_1, M_2, M_3, M_4 – центроїди граней $A_2A_3A_4, A_3A_4A_1, A_4A_1A_2, A_1A_2A_3$ відповідно.
- 1) Доведіть, що $M_1M_2 \parallel A_1A_2$.
 - 2) Знайдіть довжину кожного з ребер тетраедра $M_1M_2M_3M_4$.
- 3.66.** Точка D не належить площині трикутника ABC . На відрізках BD, AD, AC і BC вибрано точки K, L, M і N так, що $DK : KB = DM : MA = CL : LA = CN : NB = 1 : 3$. Знайдіть периметр чотирикутника $KLMN$, якщо $AB = 16$ см, $DC = 20$ см.
-  **3.67.** Використовуючи дані, наведені на малюнку, знайдіть висоту щогли AB .



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

3.68. У трикутнику ABC точка K – середина AB , точка L – середина BC . Знайдіть: 1) KL , якщо $AC = 16$ см; 2) AC , якщо $KL = 3$ см.

3.69. Пряма MN паралельна стороні AB трикутника ABC , $M \in AC$, $N \in BC$, $CM = 2$ см, $AC = 6$ см, $MN = 3$ см. Знайдіть AB .



3.70. (Національна олімпіада Австрії, 1971 р.). Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M . Доведіть, що

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(AM^2 + BM^2 + CM^2).$$

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання
№ 3

1. У колі, радіус якого 10 см, проведено хорду завдовжки 16 см. Знайдіть відстань від центра кола до даної хорди.

А	Б	В	Г	Д
5 см	6 см	7 см	8 см	10 см

2. Укажіть координати середини відрізка AB , якщо $A(-2; 7)$, $B(4; 0)$.

А	Б	В	Г	Д
(3,5; 1)	(-1; 3,5)	(4; 7)	(1; 3,5)	(-3; 3,5)

3. У коло вписано чотирикутник $ABCD$. Знайдіть кут A , якщо $\angle C = 80^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
100°	80°	60°	40°	знайти неможливо

4. Знайдіть радіус кола, вписаного у правильний трикутник зі стороною $2\sqrt{3}$ см.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$ см	2 см	1 см	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ см	3 см

5. Установіть відповідність між довжинами сторін трикутника (1–4) та його видом (А–Д).

Довжини сторін
трикутника

- 1 6 см, 6 см, 9 см
- 2 6 см, 7 см, 10 см
- 3 6 см, 8 см, 10 см
- 4 6 см, 7 см, 8 см

Вид трикутника

- А гострокутний
Б різносторонній
В гострокутний
Г рівнобедрений
В прямокутний
Г тупокутний різносторонній
Д тупокутний рівнобедрений

А Б В Г Д

1				
2				
3				
4				

6. Сума зовнішніх кутів трикутника ABC , узятих по одному при вершинах B і C , дорівнює 240° . Знайдіть градусну міру кута BAC .

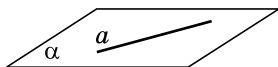
§ 4. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРИ. ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

1. Взаємне розміщення прямої і площини

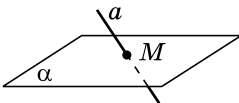
Як стверджує аксіома C_{II} , якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма (тобто всі її точки) належить цій площині. Пряма і площина можуть також мати тільки одну спільну точку або не мати спільних точок узагалі. Отже, можна дійти висновку, що є три випадки взаємного розміщення прямої і площини:

- 1) пряма може належати площині (мал. 4.1);
- 2) пряма і площина можуть мати одну спільну точку, тобто перетинатися (мал. 4.2);

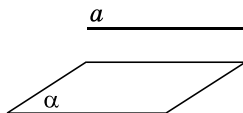
3) пряма і площина можуть узагалі не мати спільних точок (мал. 4.3).



Мал. 4.1



Мал. 4.2



Мал. 4.3

2. Паралельність прямої і площини



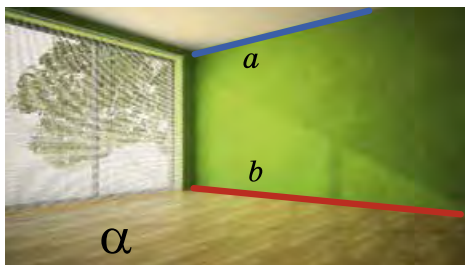
Пряму і площину називають *паралельними*, якщо вони не мають спільних точок.

На малюнку 4.3 пряма a паралельна площині α , що позначають так: $a \parallel \alpha$.

Уявлення про паралельні між собою пряму і площину у повсякденному житті можна отримати, наприклад, розглянувши тугу натягнуті дроти лінії електропередачі, що є паралельними поверхні землі (мал. 4.4), або лінію перетину стіни кімнати зі стелею, що є паралельною підлозі (пряма a на мал. 4.5 паралельна площині підлоги α).



Мал. 4.4



Мал. 4.5

Зауважимо, що у площині підлоги є пряма b , яка паралельна прямій a (мал. 4.5). Доведемо, що наявність у площині α прямої b , паралельної прямій a , є *ознакою паралельності прямої і площини*.



Теорема 1 (ознака паралельності прямої і площини). Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.

Доведення. Нехай $a \not\subset \alpha$ і $a \parallel b$, $b \subset \alpha$ (мал. 4.6). Доведемо, що $a \parallel \alpha$.