

Г. П. Бевз
В. Г. Бевз
Н. Г. Владімірова

Алгебра і початки аналізу

«Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)»
підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Київ
Видавничий дім №Освіта
2018



«Екологічна безпека і сталий розвиток»



«Здоров'я і безпека»



«Громадянська відповідальність»



«Підприємливість та фінансова грамотність»

ШАНОВНІ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ І ДЕСЯТИКЛАСНИЦІ!

*«Ви талановиті діти! Коли-небудь ви самі
приємно здивуєтесь, які ви розумні, як багато вмієте,
якщо будете постійно працювати над собою,
ставити перед собою мету і намагатися її досягти»*

Ж. Ж. Руссо

Алгебра і початки аналізу — навчальний предмет, який розкриває найважливіші теми з алгебри, математичного аналізу, теорії функцій і теорії ймовірностей. У 10 класі ви ознайомитеся з елементами теорії множин, алгебраїчними й деякими неалгебраїчними виразами, функціями та їх графіками, рівняннями, нерівностями та способами їх розв'язування, похідною та її застосуваннями тощо. Значну увагу слід приділити вивченню математичної мови — відповідного математичного апарату, який застосовують для дослідження реальних явищ і процесів. Такі відомості сучасної математики використовують фахівці багатьох галузей науки і техніки.

Підручник адресовано учням, які вивчають математику на профільному рівні. Для вас математика є одним із основних предметів. Її вивчення сприятиме свідомому й міцному оволодінню системою математичних знань, навичок і умінь, потрібних у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, у вивченні інших шкільних дисциплін та продовженні навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями зі значною математичною складовою.

У кожному параграфі підручника викладено теоретичні відомості і вміщено задачі на їх засвоєння і застосування. Читаючи теорію, основну увагу звертайте на слова, надруковані *курсивом* і **жирним шрифтом**. Їх треба розуміти і застосовувати до розв'язування задач. Майже у всіх параграфах підручника є рубрика «Хочете знати ще більше?», в якій містяться додаткові відомості для зацікавлених учнів. Відповідаючи на запитання рубрики «Перевірте себе», ви можете краще закріпити, узагальнити і систематизувати нові знання.

Кожний розділ підручника розпочинається короткими відомостями про зміст навчального матеріалу і компетентності, яких бажано набути в процесі навчання.

А наприкінці кожного розділу наведено «Скарбничку досягнень», за допомогою якої можна проаналізувати, усвідомити та повторити набуті знання.

Знати математику — це насамперед уміти користуватися нею. А для цього слід розв'язувати багато задач. У підручнику є задачі різних рівнів складності: «Виконайте усно», група А, група Б, група В і «Задачі для повторення». Порівняно важкі задачі позначено зірочкою (*). Їх призначено учням, які особливо цікавляться математикою.

Окремі задачі, що запропоновано у підручнику, — це задачі з реальними даними, що стосуються використання, збереження та примноження природних ресурсів, безпеки й охорони здоров'я громадян, кількісних показників розвитку суспільства і планування господарської діяльності, складання сімейного бюджету та реальної оцінки власних можливостей тощо. Для цих задач зроблено спеціальні позначення (дивись таблицьку на звороті титульної сторінки).

У кожному параграфі підручника є рубрика «Виконаємо разом», у якій подається декілька задач із розв'язаннями. Радимо проглянути їх, перш ніж виконувати домашнє завдання.

Перевірити, як ви засвоїли новий матеріал, і добре підготуватися до зовнішнього незалежного оцінювання ви можете, розв'язуючи задачі та виконуючи завдання з рубрик «Тестові завдання» і «Типові задачі для контрольної роботи».

Сподіваємося, що вивчення алгебри і початків аналізу за цим підручником буде для вас цікавим і нескладним. Успіху вам!

Автори

Розділ 1

ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Functions, Polynomials, Equations and Inequalities



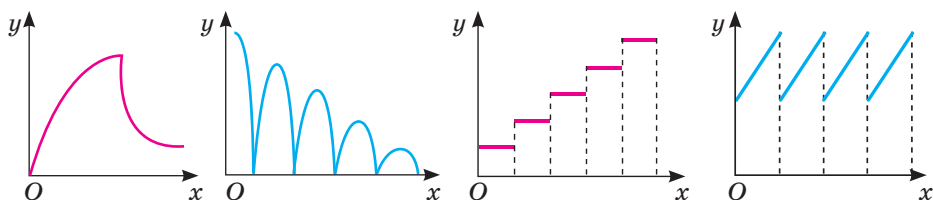
Михайло Пилипович КРАВЧУК
(1892–1942)

Всесвітньо відомий математик, академік, педагог, громадський діяч. Його ім'я носять терміни: «многочлени Кравчука», «формули Кравчука», « q -функції Кравчука-Мейкснера» та інші. Співавтор першого словника української математичної термінології. Організатор першої в Україні математичної олімпіади школярів (1935).

«Хочете навчитися математики, беріться за завдання. Кожне розв'язання є своєрідним мистецтвом пошуку».

«Немає у світі машин, які йшли не від математики, немає повнокровного життя творця техніки без цієї науки... Ніякої достовірності немає в науках там, де не можна застосувати математику. Тим-то вона, математика, для вас має стати душевною потребою, якщо хочете, хлібом і піснею».

М. П. Кравчук



НАБУВАЄМО ДОСВІДУ ТА КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

- Множини і операції над ними
- Числові функції, їх графіки та властивості
- Ділення многочленів
- Метод інтервалів
- Задачі з параметрами
- Метод математичної індукції

- Виконувати операції над множинами
- Розуміти суть функціональних залежностей, їх задання та використання
- Зображувати графіки та встановлювати властивості функції
- Розв'язувати рівняння і нерівності та доводити твердження
- Моделювати реальні процеси за допомогою функцій і рівнянь

§ 1 Множини та операції над ними

Sets and Set Operations

Сукупність тих чи інших об'єктів називають різними словами, наприклад: бригада (робітників), клас (учнів), рій (бджіл), табун (коней), зібрання (творів), набір (олівців), комплект (деталей) тощо. У математиці в таких випадках використовують одне слово — множина. Можна говорити про множину робітників, множину учнів, множину бджіл, множину олівців, множину деталей і т. ін. Множина — поняття неозначуване.

Об'єкти, які входять до множини, називають її *елементами*. Наприклад, одним із елементів множини зір, які входять до сузір'я Велика Ведмедиця, є зірка Дубхе (з арабської — ведмідь) (мал. 1).



Мал. 1

Щоб записати множину, використовують фігурні дужки. Наприклад:

- $\{2; 3; 5; 7\}$ — множина чисел 2, 3, 5, 7;
- $\{O, \bullet, \blacksquare\}$ — множина, що складається з кола O , круга $\bullet$ і квадрата $\blacksquare$.

Вважають, що всі елементи множини різні. Наприклад, не прийнято записувати $\{5; 5; 7\}$. Цю множину можна записати так: $\{5; 7\}$ або $\{7; 5\}$. Порядок елементів у записі множини значення не має. Наприклад, записи $\{2; 3; 5; 7\}$ і $\{3; 5; 2; 7\}$ означають одну й ту саму множину. Можна також сказати, що ці множини рівні.

Дві множини називаються *рівними*, якщо вони складаються з тих самих елементів.

Рівними є також множини розв'язків рівнянь $2x + 3 = 0$ і $\sqrt{x+2,5} = 1$.
Перевірте.

Множини часто позначають великими буквами латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$, а їхні елементи — малими: $a, b, c, \dots$.

Якщо елемент a належить множині M , то записують $a \in M$; якщо не належить, то пишуть: $a \notin M$. Наприклад, $5 \in \{1, 3, 4, 5\}$, $2 \notin \{1, 3, 4, 5\}$.

Множину, що складається зі скінченної кількості елементів, називають *скінченною*. Такими є: множина всіх двоцифрових чисел, множина вершин шестикутника, множина його діагоналей тощо.

Множину, яка містить нескінченну кількість елементів, називають *нескінченною*. Нескінченною є, наприклад, множина всіх натуральних чисел, множина всіх точок деякого відрізка, множина розв'язків рівняння

$$x^2 - 4 = (2 + x)(x - 2).$$

Якщо множина містить дуже багато або безліч елементів і перерахувати їх важко або й неможливо, такі множини записують інакше, *використовуючи характеристичну властивість*.

Наприклад:

$\{x|x > 5\}$ — множина всіх чисел, більших від 5;

$\{p|p \text{ — просте і } p < 120\}$ — множина всіх простих чисел, менших від 120.

Отже, множину можна задати переліком усіх її елементів або описом їх характеристичної властивості.

Розглядають множини, що містять тільки по одному елементу або не мають жодного елемента. Наприклад, множина коренів рівняння $x + 3 = 15$ містить одне число 12. Цю множину записують так: $\{12\}$. Рівняння $\sqrt{x} + 3 = 0$ коренів не має. Кажуть, що множина його коренів — порожня.

Порожньою називають множину, яка не містить елементів. Її позначають символом $\emptyset$.

У математиці найчастіше розглядають *числові множини* (елементами яких є тільки числа) і *точкові множини* (елементами яких є точки). Проте нерідко доводиться говорити і про множини виразів, рівнянь, нерівностей, функцій, відображень, відношень, переміщень, векторів тощо.

Математичний термін *множина* (і пов'язані з ним *множення*, *множник*, *многочлен* та ін.) походить від давньоукраїнського слова *много*. І. Франко писав: «Якби ти знав, як много важить слово...».

Для деяких числових множин існують усталені позначення. Їх ви знаєте з попередніх класів.

N — множина натуральних чисел;

Z — множина цілих чисел;

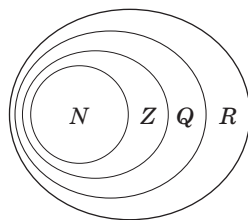
Q — множина раціональних чисел;

R — множина дійсних чисел.

Ці множини пов'язані такими співвідношеннями:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \text{ (мал. 2).}$$

Знак $\subset$ означає «є підмножиною»: кожна множина N, Z, Q є частиною (підмножиною) наступної множини.



Мал. 2



Якщо кожний елемент множини A є елементом множини B , то множину A називають підмножиною множини B .

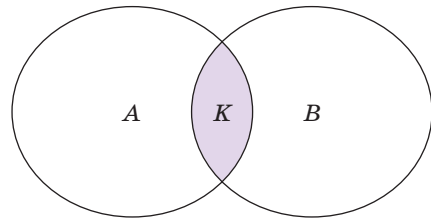
Наприклад, множина дівчаток з якогось класу є підмножиною множини всіх учнів цього класу. Множина $\{1, 2, 3, 5\}$ є підмножиною множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Записують це так: $\{1, 2, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Взагалі, якщо A — підмножина B , то пишуть $A \subset B$, або $B \supset A$. Підмножиною множини B вважають також порожню множину і саму множину B .

Не обов'язково одна з двох множин є підмножиною іншої. Наприклад, множини квадратів K і трикутників T не мають жодного спільного елемента, а множини прямокутників A і ромбів B мають спільну частину — множину

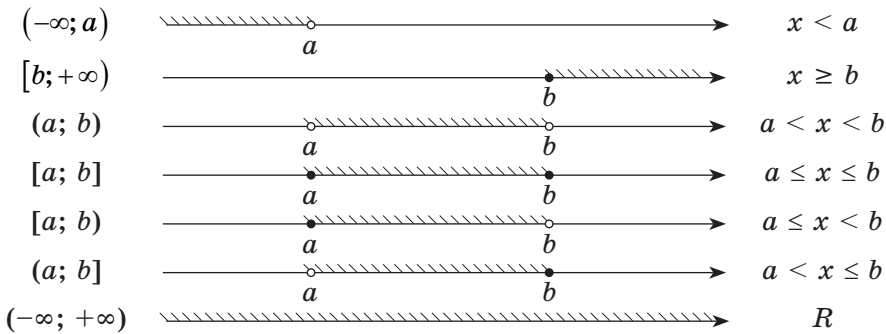
квадратів K , але ні A не є підмножиною B , ні B не є підмножиною A (мал. 3).

У цьому випадку множина K є підмножиною множини A і множини B .

Відомі вам *числові проміжки* є підмножинами множини дійсних чисел. Якщо a і b — довільні дійсні числа, то використовують такі позначення і відповідні зображення (мал. 4):



Мал. 3



Мал. 4

Розглянемо основні операції, які можна виконувати над множинами.

➔ **Перерізом двох множин називають таку множину, яка складається з усіх їх спільних елементів і тільки з них.**

Переріз множин позначають знаком $\cap$. Наприклад, якщо $M = \{a, b, c, d\}$, $P = \{b, c, p\}$, то $M \cap P = \{b, c\}$.

У загальному вигляді (мал. 5):

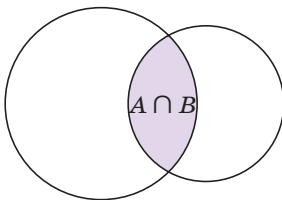
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

➔ **Об'єднанням двох множин називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать принаймні одній з цих множин і тільки з них.**

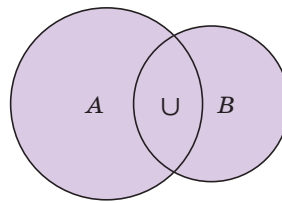
Об'єднання множин позначають знаком $\cup$.

Наприклад, якщо $M = \{a, b, c, d\}$, $P = \{b, c, p\}$, то $M \cup P = \{a, b, c, d, p\}$.

У загальному вигляді (мал. 6): $A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}$.



Мал. 5



Мал. 6

Для операцій «об'єднання» і «переріз» правильними є такі рівності:

	Переріз	Об'єднання
1	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
2	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
3	Якщо $B \subset A$, то $A \cap B = B$	Якщо $B \subset A$, то $A \cup B = A$

Поняття «переріз» чи «об'єднання» можна застосовувати до будь-яких множин. Щоб краще запам'ятати, який із символів $\cap$ або $\cup$ писати, зверніть увагу на записи «**П**ереріз», «**U**ніон».

Приклади.

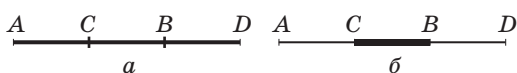
1. На малюнках 7, а і 7, б зображено об'єднання та переріз відрізків AB і CD відповідно:

а) $[AB] \cup [CD] = [AD]$,

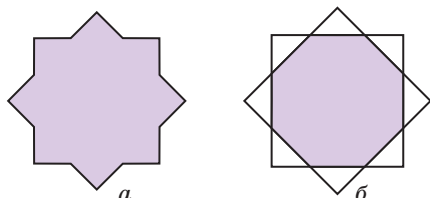
б) $[AB] \cap [CD] = [CB]$.

Примітка. Якщо відрізки, промені, прямі розглядають як множини точок, то їх позначають різними символами: $[AB]$, $[AB)$, (AB) .

2. Об'єднанням двох квадратів на малюнку 8 є неопуклий 16-кутник (мал. 8, а), а їх перерізом — опуклий восьмикутник (мал. 8, б).



Мал. 7



Мал. 8

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?



Різницею множин A і B називають множину, яка складається з усіх тих елементів множини A , які не належать множині B .

Позначають різницю множин A і B символом $A \setminus B$, а зображають схематично так, як показано на малюнку 9.

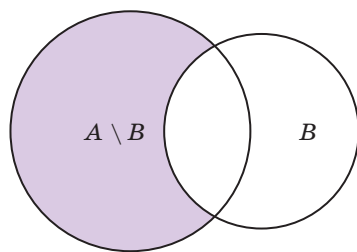
Приклади.

1. Якщо $A = \{a, b, c, k\}$, $B = \{b, c, p\}$, то $A \setminus B = \{a, k\}$.

2. Якщо $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то $B \setminus A = \{2, 4, 6\}$.

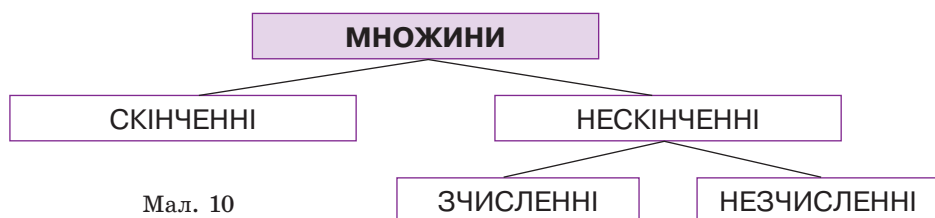
Якщо $A \subset B$, причому $A \neq \emptyset$ і $A \neq B$, то різниця $B \setminus A$ називається також *доповненням множини A до множини B* . Наприклад, доповненням множини раціональних чисел до множини дійсних чисел є множина ірраціональних чисел.

Нескінченні множини бувають зчисленні і незчисленні (мал. 10). Кожна нескінченна множина називається *зчисленною*, якщо її елементи можна пронумерувати. Наприклад, множина натуральних чисел, множина квадратів



Мал. 9

натуральних чисел, множина парних чисел — усе це множини зчисленні. Нескінченна множина, яка не є зчисленною, називається *незчисленною*. Такою, наприклад, є множина всіх точок деякого відрізка, множина дійсних чисел тощо.



Мал. 10

Зверніть увагу! У підручнику всі математичні об'єкти розглядають на множині дійсних чисел або її підмножинах.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Наведіть приклад множини. Які бувають множини?
2. Як позначають множини та їх елементи?
3. Як можна задавати множини?
4. Які множини називають рівними?
5. Що таке підмножина?
6. Що називають об'єднанням двох множин?
7. Що називають перерізом двох множин?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Запишіть усі підмножини множини $M = \{c, d, k\}$.

Розв'язання. Підмножинами даної множини є множини:

$\{c\}, \{d\}, \{k\}, \{c, d\}, \{c, k\}, \{d, k\}, \{c, d, k\}, \emptyset$.

2. Знайдіть об'єднання і переріз множин A і B , якщо

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ і } 5 < x \leq 10\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ і } -1 < x \leq 10\}$.

Розв'язання. Множину A можна задати переліком: $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, а B — це проміжок $(-1; 10]$ (мал. 11). Оскільки $A \subset B$, то $A \cup B = B = (-1; 10]$, а $A \cap B = A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.



Мал. 11

3. Анкетування учнів 10 класу показало, що 8 із них мають вдома собаку, а 15 — кішку. Скільки учнів навчаються в цьому класі, якщо п'ятеро не мають тварин, а двоє мають і кішку, і собаку?

Розв'язання.

Спосіб 1. Розглянемо підмножини учнів 10 класу:

A — множина учнів, які мають лише кішок. Вона має 13 елементів $(15 - 2 = 13)$.

B — множина учнів, які мають лише собак. Вона має 6 елементів ($8 - 2 = 6$).

C — множина учнів, які мають і кішку, і собаку. Вона має 2 елементи.

D — множина учнів, які не мають тварин. Ця множина має 5 елементів.

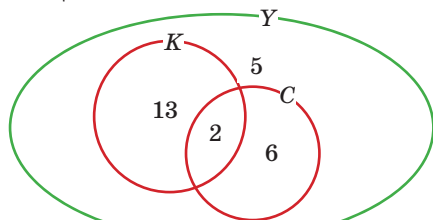
Оскільки множина всіх учнів 10 класу — це об'єднання множин A , B , C і D , то в 10 класі навчається:

$$13 + 6 + 2 + 5 = 26 \text{ (осіб).}$$

Спосіб 2. Собаку або кішку мають: $8 + 15 - 2 = 21$ (учень).

Усього учнів $21 + 5 = 26$.

Подібні задачі зручно розв'язувати на малюнках (мал. 12).



Мал. 12

Виконайте усно

- Провідмініайте слово *множина*, *множини*.
- Скільки елементів має множина двоцифрових чисел, кратних 10? Назвіть її елементи.
- Скільки елементів має множина коренів рівняння:
 - $x^2 = 2$;
 - $x^2 + 17 = 8$;
 - $\sqrt{x^2} - |x| = 0$?
- Знайдіть множину цілих чисел, які задовольняють умову:
 - $11 < x < 15$;
 - $|2x| \leq 5$;
 - $|x + 3| < 1$.
- Нехай P — множина парних цілих чисел, а H — непарних. Чому дорівнюють переріз і об'єднання цих множин?
- Знайдіть переріз і об'єднання множин букв:
 - $\{p, y, k, a\}$ і $\{k, p, y, z\}$;
 - $\{k, o, p, a, l\}$ і $\{p, a, n, o, k\}$.
- Яким може бути переріз і об'єднання множин точок:
 - двох відрізків;
 - двох площин;
 - двох півплощин?
- Чим є переріз і об'єднання множин: а) натуральних чисел і цілих чисел; б) раціональних чисел та ірраціональних чисел?
- Як називається:
 - множина корів;
 - множина людей, яких обслуговує банк;
 - множина квітів у вазі;
 - множина тварин, які населяють певну територію;
 - множина музикантів, які виступають разом?
- Розгадайте ребуси (мал. 13).



Мал. 13

РІВЕНЬ А

11. Випишіть усі елементи кожної з поданих нижче множин: A — множина назв днів тижня, B — множина кольорів світлофора, C — множина назв материків, D — множина цифр, E — множина кольорів веселки.
12. Наведіть приклади множини, яка має:
а) два елементи; б) п'ять елементів; в) один елемент.
13. Запишіть множину букв, якими записують ваше ім'я та прізвище.
14. Запишіть множину цифр, якими записують дату вашого народження (день, місяць і рік).
15. Задайте переліком елементів множину одноцифрових чисел, які діляться:
а) на 3; б) на 5; в) на 15.
16. Випишіть усі підмножини для кожної з множин:
а) $\{\bullet, \blacksquare\}$; б) $\{*, \Delta, \#\}$.
17. Випишіть усі підмножини для кожної з множин вправи 15.
18. **Практичне завдання.** Намалюйте два квадрати так, щоб їх перерізом і об'єднанням також був квадрат.

Зобразіть на числовій прямій множини (19–21).

19. а) $(-\infty; 5)$; б) $(1; 3)$; в) $[0; 2]$; г) $(7; +\infty)$.
20. а) $(-\infty; -1]$; б) $[0; 3)$; в) $[1; 2)$; г) $[4; +\infty)$.
21. а) $(-3; 5)$; б) $[5; +\infty)$; в) $(1; 2,5]$; г) $(-\infty; 0)$.

Знайдіть об'єднання множин A і B (22–23).

22. а) $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{5, 7, 3, 1\}$; в) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, -2, -3\}$;
б) $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{7, 6, 5, 4\}$; г) $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
23. а) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, a\}$; в) $A = \{a, m, n, k\}$, $B = \{a, b, c, m\}$;
б) $A = \{e, i\}$, $B = \{f, s\}$; г) $A = \{a, б, в, г, д\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Знайдіть переріз множин M і P (24–25).

24. а) $M = \{1, 3, 5, 7\}$, $P = \{2, 4, 6, 8\}$; в) $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P = \{2, 4\}$;
б) $M = \{-1, 2, -3, 4\}$, $P = \{1, 2, 3\}$; г) $M = \{0, 1, -2\}$, $P = \{-2, 1, 0\}$.
25. а) $M = \{a, b, c\}$, $P = \{a, b, d\}$; в) $M = \{a, m, n\}$, $P = \{b, c, m\}$;
б) $M = \{\blacksquare, \bullet, \heartsuit\}$, $P = \{\heartsuit, \circ, \spadesuit\}$; г) $M = \{\square, \circ, \mathfrak{J}\}$, $P = \{\circ, \mathfrak{J}, \square\}$.

РІВЕНЬ Б

26. Серед наведених нижче множин укажіть скінченні й нескінченні:
а) множина від'ємних чисел;
б) множина цифр у записі числа p ;
в) множина коренів рівняння $x^{100} - 1 = 0$;
г) множина дійсних чисел, які належать відрізку $[0; 1]$;
г) множина розв'язків рівняння $2x + 3y = 5$;
д) множина розв'язків нерівності $x^2 - 2x + 1 \leq 0$.

27. Випишіть усі підмножини множини $\{\blacktriangle, \bigcirc, \blacksquare, \Delta\}$.
28. Скільки підмножин має множина, яка містить: а) один елемент; б) два елементи; в) три елементи; г) чотири елементи; ґ) п'ять елементів?
29. Перевірте твердження «Множина, що складається з n елементів, містить 2^n підмножин» для n , що дорівнює: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Знайдіть $A \cap B$ і $A \cup B$ (30–31).

30. а) $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{5, 7, 3\}$; в) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, -1, 2, -3\}$;
 б) $A = \{\blacklozenge, \blacktriangle, \bullet\}$, $P = \{\blacktriangle, \bigcirc, \blacksquare\}$; г) $B = \{\square, \bigcirc, \blacktriangle\}$, $P = \{\bigcirc, \Delta, \square\}$.
31. а) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$; в) $A = \{б, в, г\}$, $B = \{б, в, б, г, з\}$;
 б) $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{7, 6, 5, 4\}$; г) $A = \{2, 3\}$, $B = \{22, 33\}$.
32. Із 100 опитаних студентів 48 щодня користуються метро, 55 — тролейбусом. Відомо, що 45 студентів не користуються жодним видом транспорту. Скільки осіб користується лише тролейбусом?
33. Множини задано за допомогою характеристичної властивості. Випишіть їхні елементи, якщо:
 $A = \{x | x \in Z \wedge |x| < 3\}$; $B = \{x | x \in Z \wedge -1 < x < 5\}$; $C = \{x | x \in N \wedge |x| < 1\}$.
34. Множини A , B і C задано переліком елементів. Запишіть їх за допомогою характеристичної властивості, якщо:
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$.
35. Запишіть переліком множину:
 а) спільних дільників чисел 60 і 126;
 б) спільних кратних чисел 12 і 18 з першої сотні;
 в) простих чисел з першої сотні;
 г) множину розв'язків рівняння $x^2 + y^2 = 0$.

Знайдіть об'єднання і переріз числових проміжків (36–38).

36. а) $(-\infty; 5]$ і $(1; +\infty)$; б) $(1; 3)$ і $[1; +\infty)$; в) $[0; 2]$ і $(-\infty; +\infty)$.
37. а) $(-7; 7)$ і $(-\infty; -1]$; б) $[0; 3)$ і $[-3; 0]$; в) $[4; +\infty)$ і $[1; 2)$.
38. а) $[0; 2]$ і $(-3; 5)$; б) $(5; +\infty)$ і $[-5; +\infty)$; в) $(1; 50]$ і $(-\infty; 2)$.

39. Нехай X — множина операцій, які ліцензовані у банку M , а Y — множина операцій, які ліцензовані у банку H . Перелік операцій ліцензії в банку M : 1) касове обслуговування клієнтів; 2) надання кредитів юридичним особам; 3) надання кредитів фізичним особам; 4) валютні операції на внутрішньому валютному ринку; 5) валютні операції на міжнародних грошових ринках; 6) ведення валютних рахунків клієнтів; 7) випуск цінних паперів (облігацій, ощадних сертифікатів тощо). Перелік операцій ліцензії у банку H : 1) надання консультаційних послуг; 2) касове обслуговування клієнтів; 3) надання кредитів фізичним особам; 4) залучення депозитів фізичних осіб; 5) випуск цінних паперів (облігацій, ощадних сертифікатів тощо); 6) валютні операції на внутрішньому валютному ринку; 7) відкриття філій банку на території України. Знайдіть, які операції може здійснювати банк K , якщо перелік операцій у його ліцензії: а) $X \cup Y$; б) $X \cap Y$; в) $X \setminus Y$; г) $Y \setminus X$.

РІВЕНЬ В

40. Нехай A — множина всіх коренів рівняння $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 1 = 0$. Які з чисел -1 ; $-0,5$; 0 ; $0,5$; 1 — є елементами цієї множини?
41. Для множин $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{5, 7, 3\}$ і $C = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ знайдіть:
- а) $(A \cup B) \cup C$; в) $(A \cup B) \cap C$; г) $A \cup (B \cup C)$; е) $A \cap (B \cap C)$;
 б) $(A \cap B) \cup C$; г) $(A \cap B) \cap C$; д) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$; е) $(A \cap B)(A \cap C)$.

Знайдіть $A \cap B$ і $A \cup B$ (42–45).

42. $A = \{x | x \in R \text{ і } (x^2 - 1)(x^2 - 4x - 5) = 0\}$; $B = \{x | x \in R \text{ і } (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 4x - 5)^2 = 0\}$.

43. $A = \{x | x \in R \text{ і } (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 3) = 0\}$; $B = \{x | x \in R \text{ і } (x^2 - 1)^2 - (x^2 - 4x - 5)^2 = 0\}$.

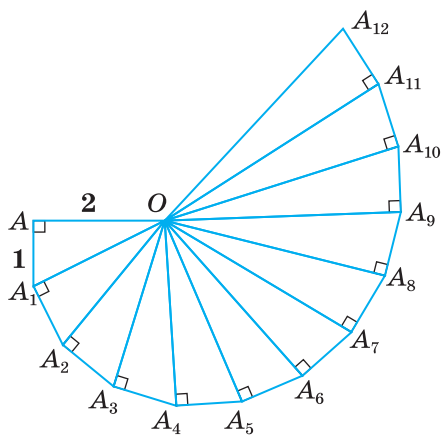
44. $A = \{x | x \in R \text{ і } x^2 - 6x + 8 > 0\}$; $B = \{x | x \in R \text{ і } x^2 - 4x - 5 < 0\}$.

45. $A = \{x | x \in R \text{ і } x^2(x^2 + 2x - 3) \geq 0\}$; $B = \{x | x \in R \text{ і } x(x^2 - 4x - 5)^2 \leq 0\}$.

46. Знайдіть $A \setminus B$, $B \setminus C$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$ для множин, наведених у вправі 41.

47. На малюнку 14 зображено 12 прямокутних трикутників, у яких $OA = 2$, $AA_1 = A_1A_2 = \dots A_{11}A_{12} = 1$. Запишіть множину довжин гіпотенуз утворених трикутників. Скільки ця множина містить ірраціональних чисел?

48. Скільки дітей у родині, якщо семеро з них залюбки їдять яблука, шестеро — груші, п'ятеро — сливи? Четверо дітей люблять їсти яблука і груші, троє — яблука і сливи, двоє — груші і сливи. Відомо, що одна дитина любить усі фрукти, а решта — принаймні один з перелічених.



Мал. 14

49. На канікулах учні 10 класу відвідали дискотеку, театр і цирк. На дискотеці було 25 учнів, у театрі — 11, а в цирку — 17, на дискотеці і в театрі — 6, в цирку і на дискотеці — 10, а в театрі і цирку — 4. Скільки десятикласників побували і на дискотеці, і в театрі, і в цирку, якщо в класі навчаються 36 учнів і лише двоє не були ні на дискотеці, ні в театрі, ні в цирку?

50. Зобразіть множини A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо:

а) $A = \{(x, y) | (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$ і $B = \{(x, y) | (x + 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 25\}$;

б) $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 4\}$ і $B = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$;

в) $A = \{(x, y) | x^2 + (y - 3)^2 \leq 16\}$ і $B = \{(x, y) | |x - 2| \leq 1\}$;

г) $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9\}$ і $B = \{(x, y) | (|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 \leq 9\}$.

51. Зобразіть множини A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ і знайдіть площі утворених фігур, якщо:
- а) $A = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ і $B = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$;
 б) $B = \{(x, y) \mid |x-y| + |x+y| = 2\}$ і $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.
52. **Відкрита задача.** Зобразіть множини A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ і знайдіть площі утворених фігур, якщо: $A = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 0\}$ і $B \dots$.
53. Для кожного значення параметра a знайдіть $A \cap B$, якщо $A = \{x \mid x^2 \geq 16\}$ і $B = \{x \mid x^2 \leq a^2\}$.
54. Задано множини $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ і $B = \{(x, y) \mid |x| + |y| = a\}$. Залежно від значень параметра a знайдіть кількість елементів множини C , якщо $C = A \cap B$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

55. Обчисліть значення виразу:

а) $4:6,25 + \frac{1}{7} \cdot 1,96$; д) $\left(\frac{1}{2} - 0,375\right):0,125$; і) $\left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right):(0,35 - 0,1)$;
 б) $\left(6\frac{2}{3} + 5\frac{1}{2} + 2\frac{4}{15}\right):\frac{1}{15}$; е) $\frac{20,88 \cdot 18 + 45:0,36}{11,94 + 19,6}$; к) $\frac{8,03 + 5,47}{(8,77 + 7,97):3,72}$;
 в) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$; є) $\sqrt{0,7} \cdot \sqrt{2,8}$; л) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}$;
 г) $\sqrt{0,8} \cdot \sqrt{0,018}$; ж) $(1 + \sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}$; м) $4\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})^2$.
 р) $(3 + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} - 3)$; з) $(3\sqrt{5} - 2)(2 + 3\sqrt{5})$;

56. Спростіть вираз:

а) $\frac{a}{a+2} - \left(\frac{a}{a^2-4} + \frac{a}{(a-2)^2}\right) : \frac{a}{(2-a)^2}$;
 б) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) \cdot \frac{(b-a)^2}{\sqrt{ab}}$;
 в) $\left(\frac{x}{x^2-y^2} - \frac{x}{(x-y)^2}\right) \cdot \frac{(y-x)^2}{2x} + \frac{y}{y+x}$;
 г) $\left(\frac{x}{x+x\sqrt{y}} + \frac{x}{x-x\sqrt{y}}\right) : \frac{2}{y-1}$.

«Людина своїми звичками приводить в рух сили, які зрештою її й гублять».

Піфагор



57. Курець випалює 4 цигарки за добу. Після випалювання першої цигарки в легенях осідає 0,0002 г нікотину. З кожною наступною цигаркою ця кількість збільшується на 0,000001 г. Яка кількість шкідливих речовин осідає в легенях курця за тиждень? А за рік?
58. Розв'яжіть нерівність:
 а) $2(x+3) - 1 \leq x - 3(3x-1)$; б) $x^2 + 6x + 6 < x$.

§ 2 Числові функції

Number Functions

Функція — одне з найважливіших понять математики і зручна математична модель реальних об'єктів, процесів і явищ. Її використовують у різних галузях знань.

У *фізиці* — висота тіла, кинутого вертикально вгору, залежить від початкової швидкості та часу руху й у будь-який момент часу визначається формулою $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, де v_0 — початкова швидкість, g — прискорення вільного падіння, t — час руху.

У *хімії* — молярна концентрація C_B розчиненої речовини B залежить від кількості розчиненої величини та об'єму розчину і задається формулою $C_B = \frac{n_B}{V}$, де n_B — число молів, V — об'єм розчину.

В *астрономії* — роздільна здатність телескопа залежить від діаметра об'єктива і визначається формулою $r = \frac{140}{D}$, де r — кутова роздільна здатність телескопа у секундах, D — діаметр об'єктива у міліметрах.

Повторимо відомості про функцію, які ви знаєте з попередніх класів.

➔ **Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y , то таку відповідність називають *функцією*.**

При цьому x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, y — *залежною змінною*, або *функцією*.

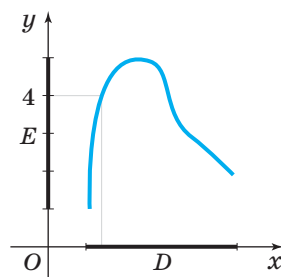
Усі значення, які може набувати аргумент функції, називають *областю визначення* даної функції і позначають буквою D .

Множину всіх значень y , яких може набувати функція, називають її *областю значень* і позначають буквою E (мал. 15). Якщо області визначення і області значень функцій є числовими множинами, то такі функції називають *числовими функціями*. Щоб задати функцію, досить зазначити її область визначення і правило відповідності.

Задавати функції можна різними способами. Часто їх задають *формулами*. Наприклад.

- Відповідність між довжиною a ребра куба і його об'ємом V можна задати формулою $V = a^3$.

- Відповідність між силою F притягання тіла до Землі і його масою m можна задати формулою $F = mg$.



Мал. 15

• Відповідність між значеннями змінної x і значеннями виразу $x^2 - 1$ можна задати формулою $y = x^2 - 1$.

Задання функції формулою зручне тим, що дає можливість знаходити значення функції для довільного значення аргументу. Якщо функцію задають формулою і нічого не говорять про область її визначення, то вважають, що ця область — множина всіх значень змінної, при яких формула має зміст. Наприклад, область визначення функції $y = x^2 + x - 1$ — множина R , а функції $y = \frac{x}{x-1}$ — множина $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Задавати функції можна і у вигляді *таблиці*. Наприклад, функцію $y = x^2 - 1$ для перших десяти натуральних значень x можна задати у вигляді такої таблиці:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	3	8	15	24	35	48	63	80	99

Тут: $D(y) = \{1, 2, 3, 5, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

$E(y) = \{0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99\}$.

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для певних значень аргументу до таблиці вже занесено відповідні значення функції, тому не треба робити будь-яких обчислень. Незручний він тим, що таблиця займає більше місця. До того ж, як правило, містить значення функції не для всіх значень аргументу, а тільки для деяких.

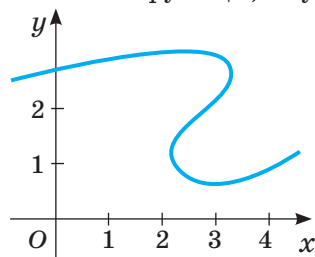
Функцію можна задавати і *словесно*. Наприклад, якщо кожному цілому числу поставити у відповідність його квадрат, то одержимо функцію, областю визначення якої є множина цілих чисел, а областю значень — множина квадратів натуральних чисел і число нуль.

Часто функції задають у вигляді графіків, побудованих у декартовій системі координат.

➔ **Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, ординати — відповідним значенням функції.**

Маючи графік функції, можна для будь-якого значення аргументу (з області визначення) вказати відповідне значення функції, тобто графік задає функцію. *Графічний спосіб* задання функції зручний своєю наочністю. Дивлячись на графік, одразу можна з'ясувати властивості функції, яку він задає.

Чи задає функцію графік, зображений на малюнку 16? Ні, бо на цьому графіку одному значенню аргументу x (наприклад, $x = 3$) відповідає три різних значення y . А згідно з означенням функцією вважається тільки така відповідність, при якій одному значенню аргументу x з області визначення відповідає єдине значення функції y .



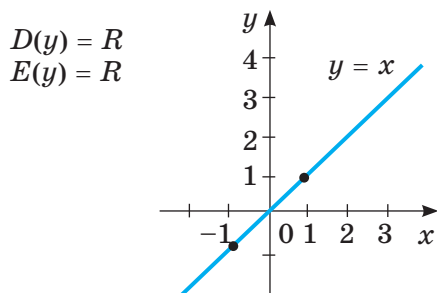
Мал. 16

Існує багато різних видів функцій. Деякі з них ви вже знаєте.

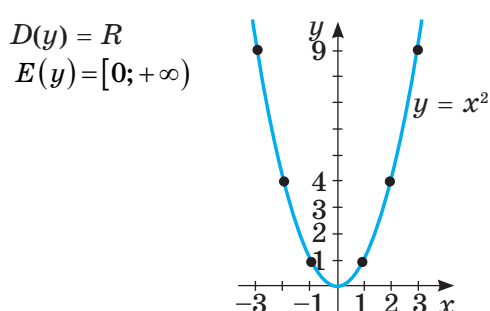
- $y = kx$ — пряма пропорційність ($k \neq 0$);
- $y = ax + b$ — лінійна функція;
- $y = \frac{k}{x}$ — обернена пропорційність ($k \neq 0$);
- $y = ax^2 + bx + c$ — квадратична функція ($a \neq 0$).

Графіки найуживаніших функцій подано в таблиці.

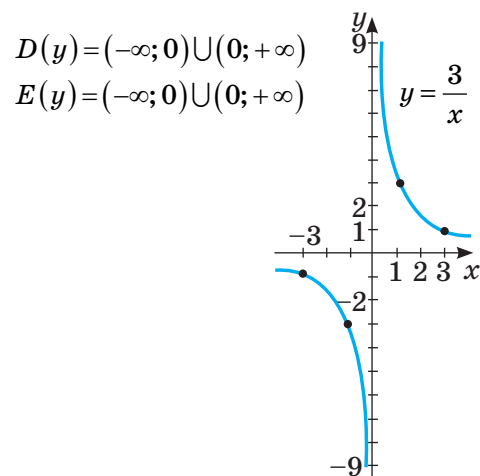
графік — **пряма**



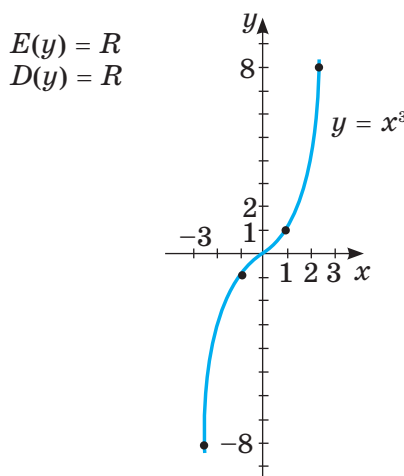
графік — **парабола**



графік — **гіпербола**

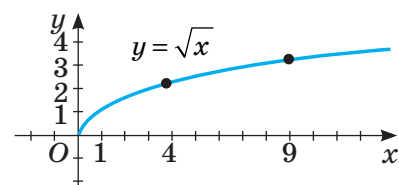


графік — **кубічна парабола**



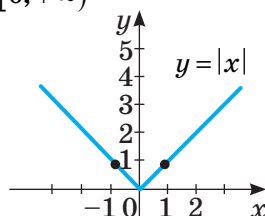
$D(y) = [0; +\infty)$

$E(y) = [0; +\infty)$



$D(y) = R$

$E(y) = [0; +\infty)$



Щоб будувати графіки складніших функцій (як ви вже знаєте з курсу алгебри 9 класу), використовують такі правила.

1. Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x .

2. Щоб побудувати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його в $\frac{1}{k}$ разів до осі x , якщо $0 < k < 1$.

3. Щоб одержати графік функції $y = f(x) + n$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести на n одиниць у напрямку осі y , якщо $n > 0$, або на $-n$ одиниць у протилежному напрямку, якщо $n < 0$.

4. Щоб одержати графік функції $y = f(x - m)$, досить графік функції $y = f(x)$ перенести на m одиниць у напрямку осі x , якщо $m > 0$, або на $-m$ одиниць у протилежному напрямку, якщо $m < 0$.

Приклади побудови графіків $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = -0,5x^2$ подано на малюнку 17, а графіків $y = x^2$, $y = (x - 3,5)^2$, $y = (x - 3,5)^2 + 3$ — на малюнку 18.

Розглянемо детальніше, як будують графіки функцій за допомогою інших перетворень.

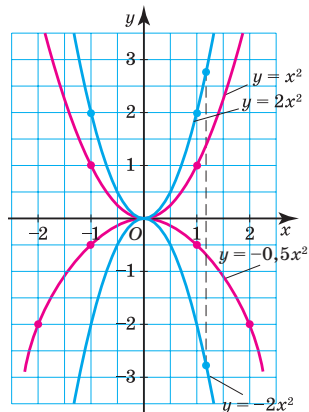
5. Щоб за допомогою графіка функції $y = f(x)$ побудувати графік функції $y = f(kx)$, ($k > 0$), потрібно:

— стиснути графік функції $y = f(x)$ у k разів до осі y , якщо $k > 1$;

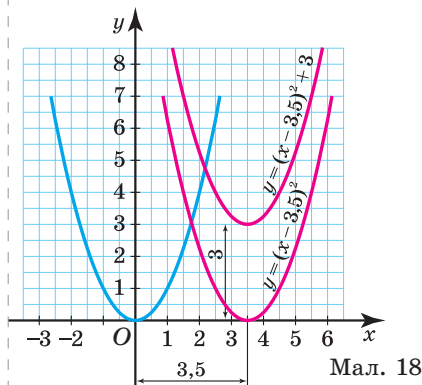
— розтягнути графік функції $y = f(x)$ у $\frac{1}{k}$ разів від осі y , якщо $0 < k < 1$.

Наприклад, на малюнку 19 подано графіки трьох функцій: 1) $y = f(x)$ (синя лінія); 2) $y = f(2x)$ (зелена лінія) — отриманий стисненням у 2 рази синьої лінії до осі y ; 3) $y = f(0,5x)$ (червона лінія) — отриманий розтягом у 2 рази синьої лінії від осі y .

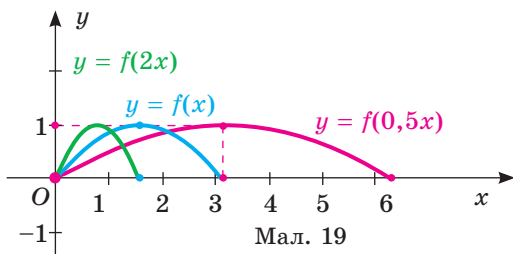
Зверніть увагу на послідовність кроків під час побудови графіків функцій, що потребують здійснення кількох геометричних перетворень. Побудову, наприклад, графіка функції $y = 0,5\sqrt{2x-3}$ виконують у такій послідовності (мал. 20):



Мал. 17



Мал. 18



Мал. 19

1) Записати функцію у вигляді $y = 0,5\sqrt{2(x-1,5)}$.

2) Побудувати графік функції $y = \sqrt{x}$.

3) Стиснути у 2 рази побудований графік $y = \sqrt{x}$ до осі y ($y = \sqrt{2x}$).

4) Перенести отриманий графік уздовж осі x паралельно на 1,5 одиниці праворуч ($y = \sqrt{2(x-1,5)}$).

5) Стиснути у 2 рази ($1 : 0,5 = 2$) побудований графік до осі x ($y = 0,5\sqrt{2(x-1,5)}$).

6. Щоб за допомогою графіка функції $y = f(x)$ побудувати графік функції $y = |f(x)|$, скористаємося означенням модуля: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$

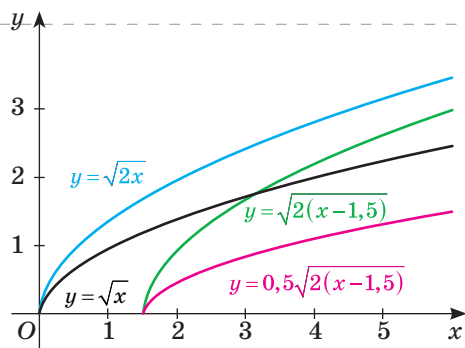
Як бачимо, значення функції $y = |f(x)|$ і $y = f(x)$ однакові за умови, що $f(x) \geq 0$ і протилежні, якщо $f(x) < 0$. Оскільки графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x , то щоб побудувати графік функції $y = |f(x)|$, досить ті частини графіка функції $y = f(x)$, які лежать нижче від осі x , замінити симетричними їм відносно цієї осі, а все інше залишити без змін. Наприклад, маючи графік функції $y = x^2 - 4$, можна одразу побудувати графік функції $y = |x^2 - 4|$ (мал. 21).

7. Розглянемо функцію $y = f(|x|)$. За означенням модуля:

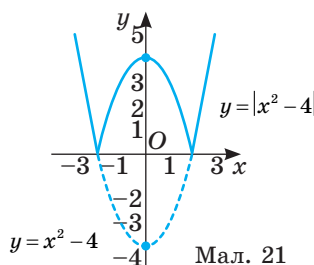
$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0; \\ f(-x), & x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$f(-x), x < 0. \quad (2)$$

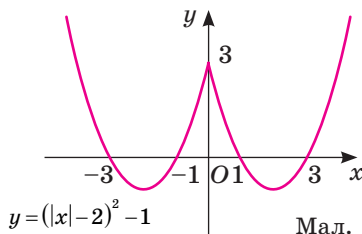
Як бачимо, графік функції $y = f(|x|)$ складається з двох частин (1) і (2). Для побудови першої частини потрібно побудувати графік функції $y = f(x)$ для $x \geq 0$. Для побудови другої частини слід відобразити побудований графік (1) симетрично відносно осі y . Графіком функції $y = f(|x|)$ буде об'єднання обох побудованих частин. Наприклад, маючи графік функції $y = (x-2)^2 - 1$, ($x \geq 0$), можна одразу побудувати графік функції $y = (|x|-2)^2 - 1$ (мал. 22).



Мал. 20



Мал. 21



Мал. 22

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

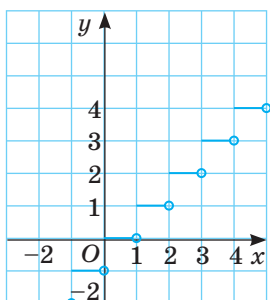
Розглянемо ще дві цікаві функції:

1) $y = [x]$, де $[x]$ — ціла частина числа x (таке найбільше ціле число $[x]$, яке не більше від x).

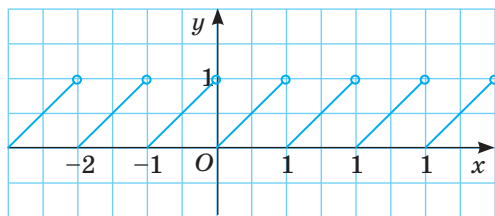
Графік функції $y = [x]$ — на малюнку 23.

2) $y = \{x\}$, де $\{x\}$ — дробова частина дійсного числа x ($\{x\} = x - [x]$) — різниця між даним числом і його цілою частиною.

Графік функції $y = \{x\}$ — на малюнку 24.



Мал. 23



Мал. 24

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке функція? Як позначають функції?
2. Що таке аргумент функції. Що таке область визначення функції?
3. Що таке область значень функції?
4. Як можна задавати функцію?
5. Що таке графік функції?
6. Назвіть основні види функцій. Які їх графіки?
7. Задано графік функції $y = f(x)$. Як побудувати графік функції: а) $y = f(x - t)$; б) $y = f(x) + n$; в) $y = kf(x)$; г) $y = f(kx)$?
8. Задано графік функції $y = f(x)$. Як побудувати графік функції: а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1 Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \frac{x+3}{9-x^2}$; б) $y = \sqrt{1-2x+x^2}$.

Розв'язання. а) Проаналізуємо функцію $y = \frac{x+3}{9-x^2}$.

Змінна x може набувати будь-яких значень, крім тих, при яких знаменник дробу $\frac{x+3}{9-x^2}$ дорівнює нулю. Щоб їх знайти, розв'яжемо рівняння

$$9 - x^2 = 0, (3 - x)(3 + x) = 0, \text{ звідси } x_1 = 3, x_2 = -3.$$

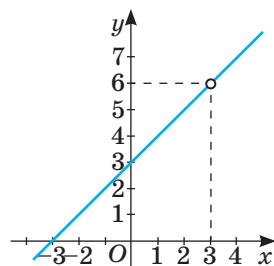
Отже, область визначення функції — множина всіх дійсних чисел, крім $x = \pm 3$.

$$D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty).$$

б) Розглянемо функцію $y = \sqrt{1 - 2x + x^2}$. Виконаємо тотожні перетворення:
 $y = \sqrt{1 - 2x + x^2} = \sqrt{(1 - x)^2} = |1 - x|$. При будь-яких значеннях змінної x вираз $|1 - x| \geq 0$, а тому область визначення функції — уся множина дійсних чисел.
 $D(y) = R$.

2 Чим різняться графіки функцій $y = x + 3$ і $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$?

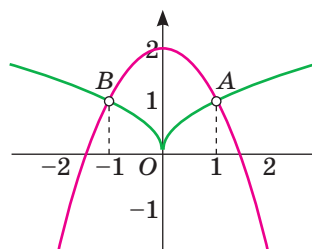
Розв'язання. Праві частини даних рівностей тотожно рівні, оскільки $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$. Але перший вираз має числові значення при всіх дійсних значеннях x , а другий — при всіх, крім $x = 3$. Тому графік першої функції — пряма, а другої — пряма без однієї точки (мал. 25).



Мал. 25

3 Розв'яжіть графічно рівняння $2 - x^2 = \sqrt{|x|}$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 2 - x^2$ і $y = \sqrt{|x|}$ (мал. 26). Графіком першої функції є парабола, вітки якої напрямлені донизу, піднята на 2 одиниці у напрямі осі y (червона лінія). Друга функція містить змінну під знаком модуля. Її графік складається з двох частин: із графіка функції $y = \sqrt{x}$ і графіка, симетричного йому відносно осі y (зелена лінія). Побудовані графіки перетинаються в точках, абсциси яких дорівнюють (можливо наближено) — 1 і -1. Перевірка переконує, що це — точні корені.



Мал. 26

Виконайте усно

59. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = 3x^2 - 2$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = 2,5$; г) $y = 4 - x$.

60. Як називається графік функції, заданої формулою:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = x^2$; в) $y = 3$; г) $y = x^{-1}$?

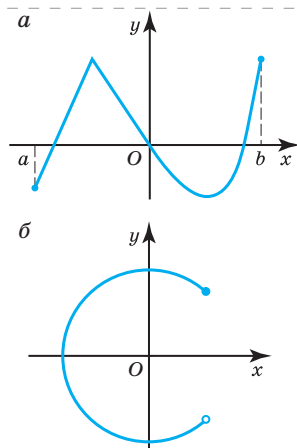
61. Графік якої з функцій проходить через початок координат:

а) $y = -5x$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = 2x^2$; г) $y = x(x - 2)$?

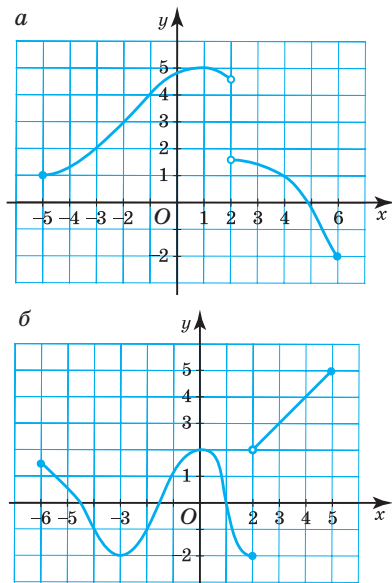
62. Які з функцій, заданих формулами $y = 15 - x$, $y = |x|$, $y = 3(x - 2)$, $y = x^2 + 5$, не можуть мати від'ємних значень?
63. Чи є площа круга функцією його радіуса? А його діаметра?
64. Чи є графіком функції фігура, зображена на малюнку 27?
65. Укажіть область визначення і область значень функцій, зображених на малюнку 28.

РІВЕНЬ А

66. Задайте формулою функцію, яка виражає площу квадрата через його периметр P .
67. Побудуйте графік функції, яка виражає залежність:
- периметра правильного шестикутника від довжини його сторони;
 - периметра квадрата від його площі.
68. Знайдіть $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, якщо функцію задано формулою:
- $f(x) = 3x - 1$;
 - $f(x) = 2x^2 + 3$;
 - $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.
69. Функцію задано формулою $y = -0,5x + 2$. Знайдіть значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -24 ; -10 ; 0 ; 5 . При якому значенні аргументу значення функції дорівнює -6 ; 0 ; 5 ; $7,5$?
70. Знайдіть значення функції, заданої формулою:
- $y = 8x - 5$, якщо значення аргументу дорівнює -2 ; 0 ; $1,5$; 12 ; 25 ;
 - $y = -\frac{x}{2} + 1$, якщо значення аргументу дорівнює -8 ; -1 ; 0 ; 1 ; 20 .



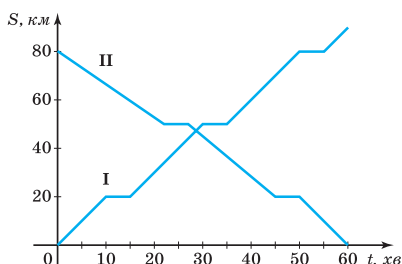
Мал. 27



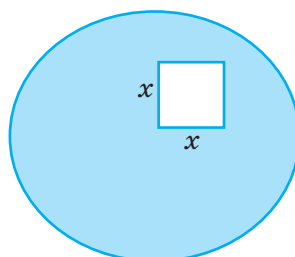
Мал. 28

71. Знайдіть значення аргументу, при якому:
- значення функції $y = -3x + 2$ дорівнює -7 ; 0 ; 5 ;
 - значення функції $y = x(x - 3)$ дорівнює -2 ; 0 ; 10 .
72. На малюнку 29 зображено графіки руху двох електропоїздів. Проаналізуйте ці рухи: скільки зупинок робив кожен поїзд; коли вони зустрілися; скільки часу тривала кожна зупинка? Знайдіть швидкість кожного поїзда до першої зупинки.

73. На малюнку 30 зображено частину круга радіуса 4 см, з якого вирізано квадрат зі стороною x . Задайте функцію залежності площі частини круга від сторони вирізаного квадрата x . Обчисліть з точністю до десятих значення цієї функції, якщо $x = 2$ і $x = 4$.



Мал. 29



Мал. 30

74. Функцію задано формулою $y = 0,25x - 1$. Заповніть таблицю.

x	-10	-5							
y			-2	-1	0	1	1,5	4	25

75. Функцію задано формулою $y = \sqrt{x+5}$ за області визначення $D = \{-4; -2,75; -1; 1,25; 4; 11\}$. Задайте її таблично і графічно.

76. Функцію задано таблицею.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Задайте її формулою. Укажіть її область визначення й область значень.

77. У яких точках графік функції $y = x^2 - 3x$ перетинає: а) вісь y ; б) вісь x ?

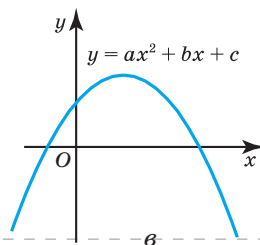
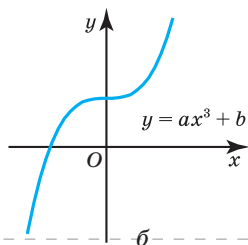
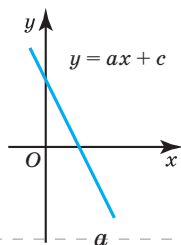
78. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = 2x - 7$; в) $y = 2 - \sqrt{x}$; г) $y = \sqrt{x+1}$;
 б) $y = \frac{x+3}{x^2-9}$; г) $y = \frac{1}{x-1}$; д) $y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2}$.

79. Побудуйте графіки функцій і знайдіть їх області значень:

а) $y = x^2$, $x \in [-2; 3]$; в) $y = x^3$, $x \in [-3; 2]$;
 б) $y = |x|$, $x \in [-1; 2]$; г) $y = \frac{1}{x}$, $x \in [-2; 0) \cup (0; 2]$.

80. Яких значень (додатних чи від'ємних) набувають параметри a , b , c для графіків, зображених на малюнку 31?



Мал. 31

81. Відомо, що графік лінійної функції проходить через точки $A(-2; 1)$ і $B(3; 6)$. Задайте цю функцію формулою.
82. Задайте формулою обернену пропорційність, графік якої проходить через точку $A(3; 4)$.
83. Чи проходить графік функції $y = x^2 - 5x + 6$ через точку $A(0; 5)$? А через точку $B(5; 6)$?
84. Функцію задано формулою $y = \frac{4}{1-x}$, де $-7 < x < 1$. Заповніть таблицю.

x	-7	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5
y							

Побудуйте графік цієї функції.

85. Функцію задано формулою $y = \frac{6}{x} + 3$, де $1 < x < 6$. Побудуйте графік цієї функції, склавши спочатку таблицю її значень.
Побудуйте графік функції. Для кожної функції знайдіть область визначення та область значень (86–87).

86. а) $y = -4x$; б) $y = 0,5x^2$; в) $y = \sqrt{x+2}$; г) $y = \frac{4}{x}$; ґ) $y = |x| - 3$.

87. а) $y = 2x - 5$; б) $y = -2x^2$; в) $y = \frac{6}{x} + 2$; г) $y = \sqrt{x} - 2$; ґ) $y = |x - 3|$.

РІВЕНЬ Б

88. Спростіть функцію і побудуйте її графік:

а) $y = x^2 - 4x + 4$; б) $y = x^2 + 6x + 9$.

89. Чим відрізняються графіки функцій:

а) $y = x - 1$ і $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; б) $y = 3 - x$ і $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x}$?

Побудуйте графіки цих функцій.

- Побудуйте в одній системі координат графіки функцій (90–92).

90. а) $y = x^3$, $y = -x^3$, $y = -x^3 + 1$; б) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 2$, $y = \sqrt{x - 1}$.

91. а) $y = -3x$, $y = -3x + 2$, $y = -3x - 0,5$; б) $y = -\frac{12}{x}$, $y = -\frac{12}{x} + 3$, $y = -\frac{12}{x}$.

92. а) $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x} - 3$, $y = 2\sqrt{x + 2}$; б) $y = -x^2$, $y = -(x + 2)^2$, $y = -x^2 + 3$.

93. Розв'яжіть графічно рівняння:

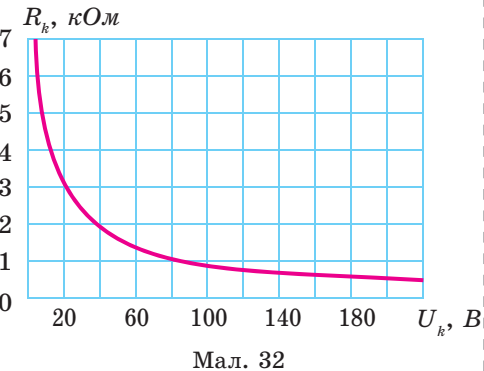
а) $2x - 6 = \sqrt{x}$; б) $x^2 = x + 2$; в) $x = x^3$; г) $\frac{3}{x} = 3x$.

94. Маса порожньої бочки — 40 кг, а маса 1 л бензину — 0,8 кг. Виразіть формулою залежність маси m бочки з бензином від об'єму V бензину в ній. Чи є ця залежність лінійною функцією?

95. Прямокутний паралелепіпед зі сторонами основи a см, b см і висотою 6 см має об'єм, що дорівнює 72 см^3 . Задайте залежність b від a .
96. У таблиці подано обсяг споживання електроенергії (у кВт·год) родиною у першому півріччі 2012 і 2017 років. Складіть таблицю про споживання електроенергії за минулий рік у вашій родині. Побудуйте в одній системі координат:
а) графік споживання електроенергії за перше півріччя минулого року у вашій родині;
б) графік споживання електроенергії за перше півріччя 2017 року у родині Рахувальників. Зробіть висновки.

Місяць	1	2	3	4	5	6
2012	150	130	145	120	125	110
2017	105	100	90	90	95	70

97. Під дією електричного струму у тілі людини виникають достатньо складні біохімічні і фізіологічні процеси, які знижують опір її тіла. Залежність опору тіла людини від *напруги електричної мережі* наведено на малюнку 32. Використовуючи графік, установіть:
а) чому дорівнює опір тіла людини, якщо напруга дорівнює 20 В;
б) починаючи з якої напруги опір тіла людини не перевищує 1 кОм;
в) зростаючою чи спадною є задана функція;
г) які чинники впливають на зміну опору тіла людини.



- Що означає знак на малюнку 33?
98. Задано функцію $y = f(x)$. Установіть відповідність між геометричними перетвореннями (1–4), які потрібно виконати, щоб із графіка функції $y = f(x)$ отримати графік іншої функції (А–Д).



Мал. 33

1	Симетрія відносно осі x	А	$y = f(x - c)$
2	Паралельне перенесення вздовж осі x	Б	$y = kf(x) \ (k > 1)$
3	Паралельне перенесення вздовж осі y	В	$y = f(kx) \ (k > 1)$
4	Розтягнення від осі x	Г	$y = -f(x)$
		Д	$y = f(x) + c$



- 99.** Ательє виготовляє та продає вишиванки, вартість кожної з яких 750 грн. Щоб пошити одну таку сорочку, потрібно 2,4 м тканини. Запишіть формулу для обчислення залишку тканини після пошиття x сорочок, якщо в сувої 50 м тканини. Яких значень може набувати x ? Скільки тканини залишиться в сувої, якщо пошиють 15 сорочок? Який дохід матиме ательє від продажу цих 15 сорочок? Який дохід матиме ательє, якщо продасть усі сорочки, виготовлені з одного сувою?

Побудуйте графік функції (100–103).

100. а) $y = \begin{cases} 4, & x \leq -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -1, & x \leq -2, \\ \frac{2}{x}, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

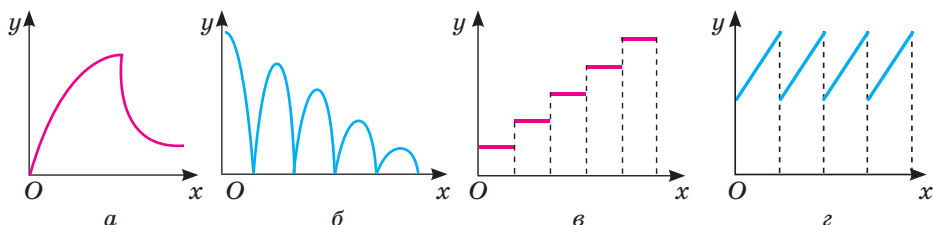
101. а) $y = x^2 - 2x - 1$; б) $y = 1 + 4x - x^2$; в) $y = 4x^2 - 4x + 5$.

102. а) $y = |x^2 + 4x + 3|$; б) $y = x^2 - 4|x| + 3$; в) $y = \sqrt{|x|} + 1$.

103. а) $y = |x^2 - 6x + 8|$; б) $y = x^2 - 2|x| - 3$; в) $y = \sqrt{|x|} - 2$.

104. Установіть, який із графіків (мал. 34) відповідає кожній з описаних нижче ситуацій:

- 1) на газоні росте трава, яку регулярно зкошують (x — час, y — висота трави);
- 2) груша росте, потім її зривають і висушують (x — час, y — маса груші);
- 3) м'яч падає з деякої висоти на підлогу (x — час, y — висота м'яча над підлогою);
- 4) через кожну годину робочого часу на склад здають однакову кількість виготовлених деталей (x — час, y — кількість деталей на складі).



Мал. 34

105. Практичне завдання. Складіть завдання, аналогічне завданню № 104, і запропонуйте його для розв'язання однокласникам.

Розв'яжіть графічно рівняння (106–107).

106. а) $1 - x^2 = \sqrt{x}$; б) $2 - x^2 = x$; в) $2x + 3 = x^2 - 4|x| + 3$.

107. а) $\frac{3}{x} = x + 2$; б) $\frac{x-1}{2} = \frac{1}{x-2}$; в) $\frac{x}{2} = \frac{2}{|x|}$.

- 108.** Транспортні витрати (в умовних грошових одиницях) на перевезення одиниці вантажу залізничним транспортом виражаються функцією $y = 2x + 100$, а автомобільним — функцією $y = x + 200$, де x — вимірюється у кілометрах. Установіть, на які відстані вигідніше перевозити вантаж залізничним транспортом, а на які — автомобільним.

Рівень В

- 109.** Вважають, що в разі заглиблення на кожні 30,5 м внутрішня температура Землі підвищується на 1°C . На глибині 5 м вона дорівнює 15°C . Задайте залежність температури t від глибини h . Яка температура на глибині 1 км? А на глибині 3 км?

- 110.** Для кожного значення параметра a вкажіть кількість розв'язків рівняння:

а) $4 - x^2 = a$; б) $2\sqrt{x} = a$; в) $|x| - 3 = a$; г) $\frac{2}{x} = a$.

- 111.** Знайдіть область визначення функції:

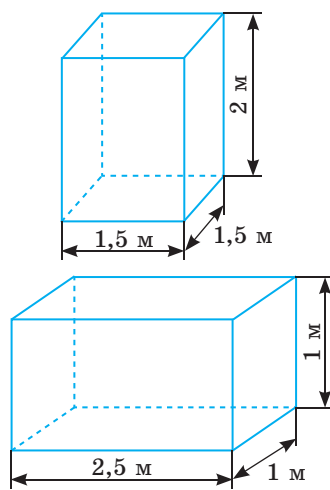
а) $y = \frac{\sqrt{x-6}}{x^2-1}$; б) $y = \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{|x|-2}$; в) $y = \frac{3}{\sqrt{x^2-4x+3}} + \frac{\sqrt{4x-x^2}}{2x^2-7x}$.

- 112.** На малюнку 35 зображено два резервуари, що мають форму прямокутного паралелепіпеда, і подано їх розміри. Перший резервуар наповнено водою на $\frac{3}{5}$ об'єму, а другий —

на $\frac{2}{5}$ об'єму. З першого резервуара щодня

беруть 35 літрів води, а з другого — 25 л. Запишіть функцію, яка показує, у скільки разів через x днів у першому резервуарі залишиться води більше, ніж у другому. Обчисліть, у скільки разів у першому резервуарі залишиться води більше, ніж у другому через 15 днів. Що означає рівність $\frac{2700-35x}{1000-25x} = 4$? Розв'яжіть це рівняння і

зробіть висновок.



Мал. 35

- Побудуйте графіки функцій (113–120).**

113. а) $y = 2\sqrt{x^2+4x+4}+3$; б) $y = 5 - \sqrt{4x^2-4x+1}$.

114. а) $y = ||x|-5|$; б) $y = |4x^2-4|x|+3|$; в) $y = |x^2+|x|-6|$; г) $y = |3\sqrt{|x|-3}-2|$.

115. а) $y = \frac{2}{|x|}$; б) $y = 1 - \sqrt{|x|}$; в) $y = \frac{6}{|x|-3}$; г) $y = \left| \frac{-8}{|x|-4} \right|$.

116. а) $y = |x+1| + |x-3|$;

в) $y = |x-2| - |x+4|$.

б) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$;

г) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.

117. а) $y = 2\sqrt{4-x}$; б) $y = 0,5\sqrt{2x-4}$;

в) $y = 3\sqrt{|x|-2}$; г) $y = -2\sqrt{6-2|x|}$.

118. а) $y = |(2x-4)^2 - 4|$; б) $y = -0,5(x+2)^2 + 2$;

в) $y = |2 - (0,5|x|-2)^2|$.

119. а) $y = -2[x]$; б) $y = 0,5\{x\}$;

в) $y = [x-1]$; г) $y = \{x-0,25\}$.

120. **Відкрита задача.** Побудуйте графік функції $y = 2|x| + \dots$ і знайдіть її область значень.

121. Знайдіть область значень функції:

а) $y = 2x^2 + 3$; б) $y = \sqrt{x} - 5$;

в) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$;

г) $y = 2|x+4| + 7$.

122. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $|x^3| = x$;

б) $\sqrt{|x|+2} = 4 - |x|$;

в) $4 - x^2 = |x-2|$;

г) $\frac{2}{x} = |3 - x^2|$.

Скільки спільних точок мають графіки заданих функцій залежно від значень параметра a (123–124)?

123. а) $y = |x| - 2$ і $y = a$;

б) $y = |x^2 - 2x - 3|$ і $y = a$.

124. а) $y = |x^2 - 4x|$ і $y = a - 2$;

б) $y = |x+2| + |x-3|$ і $y = a$.

125. При яких значеннях параметра a рівняння $||x-3|-2| = x-a$, має безліч коренів?

126. При яких значеннях параметра a рівняння $|3|x-4|-2| = a-x$ має три корені?

127. Для кожного значення параметра a знайдіть кількість коренів рівняння $|2|x+2|-4| = x-a$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

128. У перший день робітник виконав $\frac{1}{5}$ всього замовлення, а у другий $\frac{2}{3}$.

У скільки разів робота, виконана за два дні, більша за невиконану роботу?

129. Скоротіть дроб: а) $\frac{m^2+m}{m^2-1}$; б) $\frac{m^2-6m+9}{m^2-9}$; в) $\frac{m^2-7m+10}{m^2-m-2}$.

130. Розв'яжіть нерівність:

а) $5x + 6 < 18 - 3x$;

в) $-2(x+15) < -30$;

г) $|x-3| < 6$;

б) $x^2 - x(3+x) > 2(x-1)$;

г) $(x+2)^2 \leq (x-3)^2$;

д) $|15+3x| > 30$.

131. Головними чинниками негативного впливу на тваринний світ є знищення та трансформація природних екосистем, надмірне комерційне використання тваринного світу та браконьєрство. Особливої охорони та відновлення потребують різні види тварин, занесені до Червоної книги України: ракоподібні (31 тип), комахи (226), молюски (20), риби (69), птахи (87), ссавці (68), інші (41). Побудуйте стовпчасту і секторну діаграму, які відображають співвідношення між цими видами тварин.

§ 3 Властивості функції

Function Properties

Для того, щоб вивчати процеси і явища навколишнього світу, потрібно вміти досліджувати відповідні математичні моделі, зокрема і функції. *Дослідити функцію* — означає виявити її найважливіші властивості:

- 1) вказати область визначення;
- 2) вказати область значень;
- 3) з'ясувати, чи є дана функція парною або непарною;
- 4) знайти точку перетину графіка функції з віссю y ;
- 5) знайти нулі функції та проміжки знакосталості;
- 6) визначити проміжки зростання чи спадання;
- 7) з'ясувати, чи має функція найбільше і найменше значення;
- 8) побудувати графік функції.

Область визначення і область значень. Встановлюючи область визначення функції, вказують усі значення, яких може набувати аргумент. Якщо функцію задано формулою, а про її область визначення нічого не сказано, то розуміють, що вона така сама, як і область допустимих значень змінної, яка входить до цієї формули.

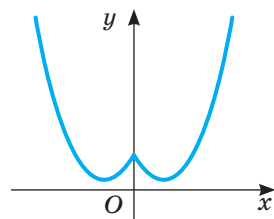
Якщо функцію задано графічно, то область визначення функції — проекція її графіка на вісь x ; область значень функції — проекція її графіка на вісь y (мал. 15). Наприклад, область визначення функції $y = x^2$ — множина всіх дійсних чисел R , область її значень — проміжок $[0; +\infty)$.

Парність чи непарність функцій. Функція $y = f(x)$ називається **парною**, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = f(x)$.

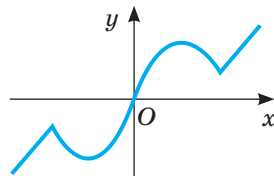
Функція $y = f(x)$ називається **непарною**, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Існують функції ні парні, ні непарні. Це такі функції, в яких або область визначення не симетрична відносно нуля, або для яких не виконується жодна з умов $f(-x) = \pm f(x)$.

Якщо функцію задано графічно, то дослідити її на парність або непарність досить просто, оскільки графік парної функції симетричний відносно осі y (мал. 36), а непарної — відносно початку координат (мал. 37).



Мал. 36



Мал. 37

Наприклад, з функцій, заданих на R , $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = |x| - 3$ — парні, $y = x^3$, $y = x^3 + x$ — непарні, а $y = 2x + 3$, $y = x^2 + x$ — ні парні, ні непарні. Побудуйте їхні графіки та переконайтеся в цьому.

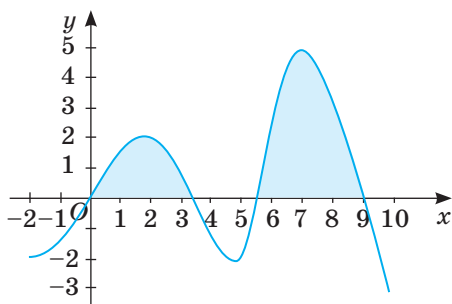
Нулі функції та проміжки знакосталості. Значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю, називають **нулями функції**. Проміжки області визначення функції, на яких функція не змінює знака (тобто має тільки додатні або тільки від'ємні значення), називають **проміжками знакосталості** (йдеться про найширші проміжки).

Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Корені цього рівняння є нулями функції.

Щоб знайти проміжки знакосталості, потрібно розв'язати нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Наприклад, нулями функції $f(x) = x^2 - 9$ є числа 3 і -3 , бо $f(3) = 0$ і $f(-3) = 0$. Функція набуває від'ємних значень, якщо $x^2 - 9 < 0$, тобто коли $x \in (-3; 3)$.

Для знаходження проміжків знакосталості та нулів функції можна скористатися її графіком. На проміжках області визначення, де $f(x) > 0$, графік функції $y = f(x)$ розташований вище осі абсцис. Графік функції $y = f(x)$ розташований нижче осі абсцис на проміжках області визначення, де $f(x) < 0$. Абсциси точок перетину графіка функції з віссю x — це нулі функції. Для прикладу розглянемо графік функції



Мал. 38

$y = f(x)$, де $x \in [-2; 10]$ (мал. 38). На проміжках $(0; 3,5)$ і $(5,5; 9)$ — функція набуває лише додатних значень, а на проміжках $(-2; 0)$, $(3,5; 5,5)$ і $(9; 10)$ — лише від'ємних. Нулями функції $f(x)$ є числа 0; 3,5; 5,5 і 9.

Монотонність. Функцію називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції.

Якщо для будь-яких x_1 і x_2 з проміжку X , таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$, то функція $f(x)$ — **зростаюча** на проміжку X .

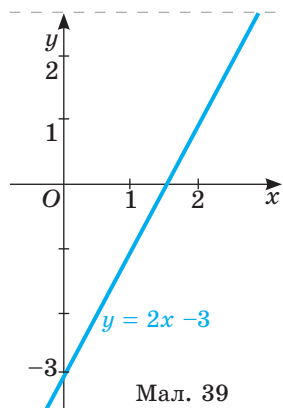
Функцію називають **спадною** на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає менше значення функції.

Якщо для будь-яких x_1 і x_2 з проміжку X , таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$, то функція $f(x)$ — **спадна** на проміжку X .

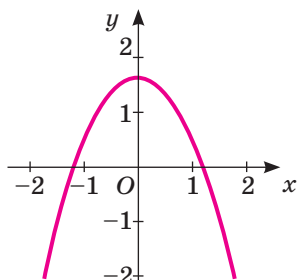
Якщо функція на всій області визначення зростає або на всій області визначення спадає, її називають **монотонною**. Якщо ж функція зростає на деякому проміжку або спадає на ньому, то говорять, що вона монотонна на даному проміжку (йдеться про найширші проміжки). Наприклад, монотонною є функція $y = 2x - 3$, бо вона на всій області визначення зростає (мал. 39).

Функція $y = 2 - x^2$ монотонна на проміжку $(-\infty; 0)$, на якому зростає, і на проміжку $(0; +\infty)$, на якому спадає. На всій області визначення вона не монотонна (мал. 40).

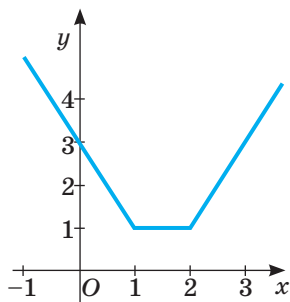
Проміжок, на якому функція не змінює свого значення, називають проміжком *сталості* функції. Наприклад, функція $y = |x - 1| + |x - 2|$ на проміжку $(-\infty; 1)$ спадає, на проміжку $[1; 2]$ набуває значення $y = 1$, а на проміжку $(2; +\infty)$ — зростає (мал. 41). Отже, проміжок $[1; 2]$ — проміжок сталості цієї функції.



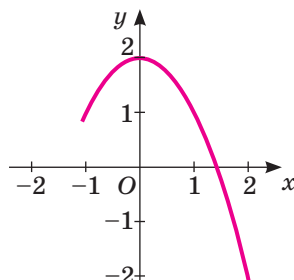
Мал. 39



Мал. 40



Мал. 41



Мал. 42

Найбільше і найменше значення функції. Характеризуючи властивості функції, часто відмічають також, у яких точках вона набуває *найбільшого значення*, у яких — *найменшого*.

Найбільше (найменше) значення функції $f(x)$ на деякому проміжку X — це саме велике (мале) серед усіх значень, яких функція $f(x)$ набуває на цьому проміжку X .

Наприклад, найбільше значення функції $y = 2 - x^2$ дорівнює 2 (мал. 40), а найменше значення функції $y = |x - 1| + |x - 2|$ дорівнює 1 (мал. 41).

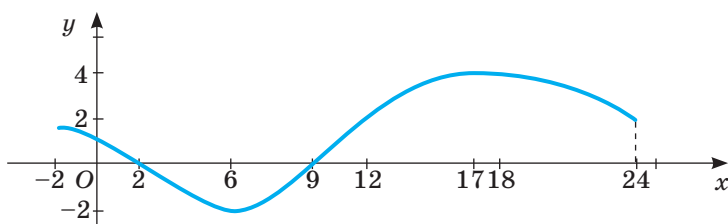
Залежно від проміжку X та властивостей функції $f(x)$ вона може мати і найбільше і найменше значення, може мати тільки одне з них, а може не мати жодного. Наприклад, функція $y = 2 - x^2$, задана на проміжку $[-1; 2]$, у точці $x = 0$ має найбільше значення 2, а в точці $x = 2$ — найменше значення, яке дорівнює -2 (мал. 42).

У загальному вигляді квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$, визначена на R , набуває найбільшого або найменшого значення у точці, що відповідає вершини параболи. Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, і у абсцисі вершини параболи функція набуває найменшого значення. Якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз, і у точці, що відповідає вершині параболи, функція набуватиме найбільшого значення. Вершина параболи має координати $\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-D}{4a}\right)$. Отже, квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$,

визначена на R , має найбільше або найменше значення у точці $x = \frac{-b}{2a}$ і воно дорівнює $y = \frac{-D}{4a}$.

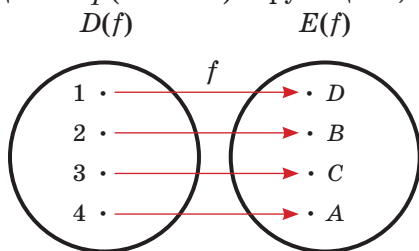
Деякі з властивостей функцій досить просто з'ясувати, дивлячись на її графік. Наприклад, функція, графік якої зображено на малюнку 43, має такі властивості.

1. Область визначення $D(y) = [-2; 24]$.
2. Область значень $E(y) = [-2; 4]$.
3. Функція ні парна, ні непарна.
4. Графік функції з віссю y перетинається в одній точці — $(0; 1)$.
5. Функція має два нулі: $x_1 = 2$ і $x_2 = 9$.
 $f(x) > 0$, якщо $x \in (-2; 2) \cup (9; 24)$, а $f(x) < 0$, якщо $x \in (2; 9)$.
6. Функція спадає на двох проміжках $x \in (-2; 6)$ і $x \in (17; 24)$; зростає функція на одному проміжку $x \in (6; 17)$.
7. Функція має найбільше значення $y = 4$ при $x = 17$ і найменше значення $y = -2$ при $x = 6$.

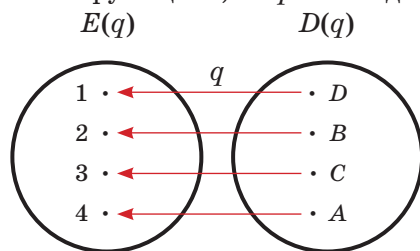


Мал. 43

Функції оборотні і необоротні. Нехай задано функцію $y = f(x)$ (мал. 44), тобто деяку відповідність між множинами $D(f)$ і $E(f)$. Якщо обернена відповідність q (мал. 45) є функцією, то її називають функцією, *оберненою до f* .



Мал. 44



Мал. 45

Функцію, яка має обернену, називають *оборотною*, а функцію, яка не має оберненої, — *необоротною*.

Функція оборотна тоді і тільки тоді, коли кожне своє значення вона набуває тільки один раз. Графічна інтерпретація: функція $y = f(x)$ є оборотною тоді і тільки тоді, коли будь-яка пряма, що паралельна осі x , і сама вісь x

перетинають графік функції не більше, ніж в одній точці. Наприклад, функція $y = x^3$ — оборотна, а $y = x^2$ — необоротна.

Якщо функція q обернена до f , то і f — обернена до q . Такі дві функції називають взаємно оберненими.

З означення оберненої функції випливає, що область визначення прямої функції f є областю значень оберненої функції q , і навпаки. Тобто: $D(f) = E(q)$ і $D(q) = E(f)$.

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

На малюнку 46 зображено графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$, визначені на множині $[0; +\infty)$. Ці функції взаємно обернені на множині $[0; +\infty)$. Їх графіки симетричні відносно прямої $y = x$.

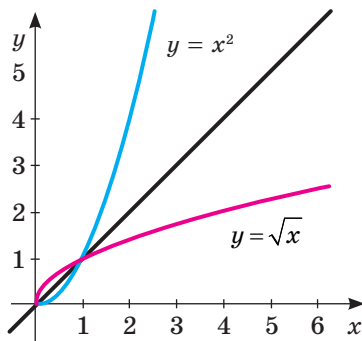
Теорема (про обернену функцію). Якщо функція монотонна на деякому проміжку, то вона оборотна.

Наприклад, функція, графік якої зображено на малюнку 39 має обернену, оскільки вона монотонна (зростаюча). А функції, графіки яких зображено на малюнках 36 і 37 — не мають обернених, оскільки на множині R вони не монотонні.

Зверніть увагу! Якщо функція $y = f(x)$ — зростає (спадає) на деякому проміжку, то обернена до неї функція також зростає (спадає).

Щоб знайти функцію f , обернену до функції q , що задана графічно, досить побудувати графік, симетричний графіку функції q відносно прямої $y = x$. А як знайти функцію, обернену до функції, що задана формулою? Розглянемо конкретний приклад.

Нехай дано функцію $y = 5x + 2$. Якщо виразити x через y , матимемо $x = \frac{y-2}{5}$. Якщо в отриманій рівності замість x написати y , а замість y написати x , дістанемо: $x = \frac{y-2}{5}$. Це функція, обернена до даної. Дану функцію можна також назвати оберненою до здобутої.



Мал. 46

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Властивості монотонності (зростання і спадання) є важливими характеристиками функцій, що часто використовуються для розв'язування задач. Під час розв'язування рівнянь користуються такими твердженнями:

1. Якщо функції $y = f(x)$ і $y = q(x)$ — зростаючі (спадні) на деякому проміжку M , то функція $y = f(x) + q(x)$ також зростаюча (спадна) на цьому проміжку M .

2. Якщо функція $y = f(x)$ — зростаюча (спадна) на деякому проміжку M , то рівняння $f(x) = a$, де a — деяке число, має не більше одного кореня.

3. Якщо на деякому проміжку M функція $y = f(x)$ — зростаюча, а $y = q(x)$ — спадна, то на цьому проміжку рівняння $f(x) = q(x)$ має не більше одного кореня.

На основі останнього твердження можна встановити, що рівняння $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$ має лише один корінь $x = 4$, який легко знаходять випробуванням.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке область визначення і область значень функції? Як їх знайти за допомогою графіка?
2. Що називають нулями функції? А проміжками знакосталості?
3. Які функції називають зростаючими? А спадними?
4. Чи може функція на одному проміжку спадати, а на іншому — зростати?
5. Які функції називаються парними? Наведіть приклади парних функцій.
6. Які функції називаються непарними? Наведіть приклади.
7. Чи правильно, що кожна функція є парною або непарною?
8. Чи існують функції, які одночасно є і парними, і непарними?
9. Які функції називають оборотними?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1 Побудуйте графік функції $y = x^2 + 4x$ і визначте проміжки, на яких задана функція спадає, а на яких — зростає. При якому значенні x значення даної функції найменше?

Розв'язання. Дана функція квадратична, її графік — парабола, вітки якої напрямлені вгору, а вершина має координати: $x = -2$ і $y = -4$. Знайдемо нулі функції: $x^2 + 4x = 0$, або $x(x + 4) = 0$, звідки $x = 0$, $x = -4$.

За знайденими координатами будуюмо параболу (мал. 47).

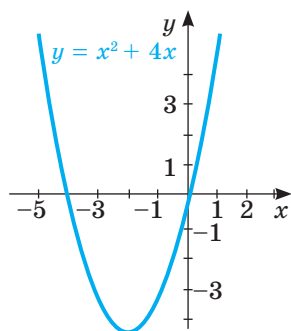
Як видно з графіка, дана функція спадає на проміжку $(-\infty; -2)$, зростає на проміжку $(-2; +\infty)$, а найменше значення дорівнює -4 , якщо $x = -2$.

- 2 Парною чи непарною є функція:

а) $y = 5x^2 + 3$; б) $y = \frac{x^3}{1-x^2}$; в) $y = \frac{x^2-x}{x-1}$?

Розв'язання. а) Область визначення $D(y)$ функції $y = 5x^2 + 3$ — множина всіх дійсних чисел $\mathbf{R}$, симетрична відносно 0. Знайдемо $f(-x)$:

$f(-x) = 5(-x)^2 + 3 = 5x^2 + 3 = f(x)$. Отже, функція $y = 5x^2 + 3$ — парна.



Мал. 47

б) Область визначення функції $y = \frac{x^3}{1-x^2}$: $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ є симетричною відносно 0. $f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -f(x)$. Отже, функція $y = \frac{x^3}{1-x^2}$ — непарна.

в) $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Отже, область визначення не симетрична відносно нуля, тобто функція загального виду — ні парна, ні непарна. Хоча, якщо перетворити дану функцію, то отримаємо $y = \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x$, а функція $y = x$ — непарна. Тому умова про симетричність області визначення відносно нуля так само важлива, як і друга умова про $f(-x)$.

3 Доведіть, що функція $f(x) = 0,5x^3 + 1$ — зростає на всій області визначення.

Розв'язання. Нехай $x_1 < x_2$. Тоді $f(x_1) = 0,5x_1^3 + 1$, а $f(x_2) = 0,5x_2^3 + 1$. Порівняємо значення $f(x_2)$ і $f(x_1)$. Знайдемо їхню різницю:

$$f(x_1) - f(x_2) = 0,5x_1^3 + 1 - 0,5x_2^3 - 1 = 0,5(x_1^3 - x_2^3) = 0,5(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

Перший множник від'ємний за припущенням, а другий — додатний при всіх значеннях x_1 і x_2 . Маємо $f(x_1) - f(x_2) < 0$, тобто $f(x_1) < f(x_2)$. Оскільки меншому значенню аргументу відповідає менше значення функції, то функція $f(x) = 0,5x^3 + 1$ зростає на всій області визначення.

Виконайте усно

132. Які з функцій визначені на всій числовій осі:

а) $y = 3x - 5$; б) $y = x^2 + 10$; в) $y = x^{-1} + 1$?

133. Функція $y = f(x)$ має найменше значення, що дорівнює 4. Яке найменше значення має функція:

а) $y = f(x) + 5$; б) $y = f(x) - 7$?

134. Функція $f(x)$ має найбільше значення в точці $x = 7$. У якій точці має найбільше значення функція:

а) $y = f(x) - 5$; б) $y = f(x) + 7$?

135. Функція $f(x)$ має найбільше значення в точці $x = 7$. У якій точці має найбільше значення функція:

а) $y = f(x - 5)$; б) $y = f(x + 7)$?

136. Які з функцій зростаючі, а які — спадні:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = 7 - x$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \sqrt{x}$?

137. На яких проміжках зростає і на яких спадає функція:

а) $y = x^2$; б) $y = -x^2$; в) $y = 1 + x^2$; г) $y = (x + 3)^2$?

138. Функція $y = f(x)$ — парна. Чи буде парною функція:
а) $y = -f(x)$; б) $y = f(x) + b$; в) $y = f(x + a)$, якщо $a \neq 0$?
139. Які з функцій оборотні, а які — ні:
а) $y = 2x - 3$; б) $y = 7 - 0,5x$; в) $y = 2x^2$; г) $y = \sqrt{x}$?

РІВЕНЬ А

140. Побудуйте графік функції $y = 0,5x + 3$ і визначте проміжки знакосталості та нулі функції. Чи має функція найбільше та найменше значення?
141. Побудуйте графіки функцій $y = 0,1x - 2$ і $y = 1 - 2x$. Знайдіть область визначення і область значень цих функцій. Яка з цих функцій зростаюча, а яка — спадна?
142. Знайдіть область визначення функцій.
а) $y = \frac{x-2}{5}$; б) $y = 2 - \frac{1}{x}$; в) $y = \sqrt{x+1}$; г) $y = \frac{1}{x-2}$.
143. Знайдіть область визначення функцій.
а) $y = x^2 - 4$; б) $y = \frac{x-2}{x}$; в) $y = \sqrt{2x-3}$; г) $y = \frac{x}{x^2+1}$.
144. Знайдіть область значень функції $y = x + 3$, заданої на проміжку:
а) $[-3; 3]$; б) $[1; 7]$; в) $[0; +\infty)$.
145. Знайдіть область значень функції $y = 4 - x$, заданої на проміжку:
а) $[-3; 0]$; б) $[1; 5]$; в) $(-\infty; 0)$.
146. Покажіть, що функція:
а) $f(x) = 3x + 1$ ні парна, ні непарна;
б) $y = 0$, $x \in [-1; 1]$ — парна і непарна.
- Спробуйте навести приклади інших функцій, які водночас є парними і непарними.
147. Доведіть, що дана функція парна:
а) $y = x^2 + 3$; б) $y = 4 : x^2$; в) $y = -x^2 + 1$; г) $y = 2 + x^4$.
148. Доведіть, що дана функція непарна:
а) $y = -x^3$; б) $y = x + x^3$; в) $y = 5x$; г) $y = x^5$.
149. Покажіть, що дана функція ні парна, ні непарна:
а) $y = x^3 + 2$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = x^2 + 3x$; г) $y = (x - 3)^2$.
150. Які з функцій парні, які — непарні, які — ні парні, ні непарні:
а) $y = 3x$; б) $y = x^3 - 1$; в) $y = x^2 + 3$; г) $y = x(1 - x)$; г) $y = \sqrt{x}$?
151. Перемалюйте графіки з малюнка 48 у зошит. Кожний із графіків побудуйте так, щоб одержана функція була парною. Для побудованих графіків установіть:
а) нулі функції; б) проміжки знакосталості; в) інтервали зростання і спадання; г) найбільше і найменше значення функції.

152. Перемалюйте графіки з мал. 48 у зошит. Кожний з графіків добудуйте так, щоб одержана функція стала непарною. Для побудованих графіків установіть:

- а) нулі функції; б) проміжки знакосталості; в) інтервали зростання і спадання; г) найбільше і найменше значення функції.

153. Скільки нулів має функція:

- а) $y = x + 3$; в) $y = x^2 - 1$;
б) $y = 6x$; г) $y = x^2 - 7x$?

154. Знайдіть нулі функції:

- а) $y = 12x - 3$; в) $y = \sqrt{x} - 5$;
б) $y = x^2 - 4$; г) $y = x^2 - 4x$.

155. Запишіть проміжки знакосталості функції:

- а) $y = x + 3$; в) $y = x^2 - 25$;
б) $y = 3x$; г) $y = -x^2 + 9$.

156. Які з функцій зростаючі, а які — спадні:

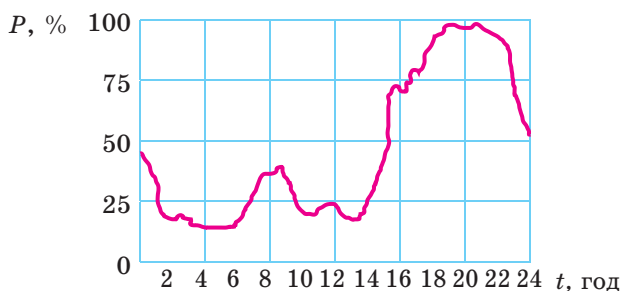
- а) $y = 2x$; б) $y = -x - 2$; в) $y = x^3$; г) $y = x$?

157. Побудуйте графік функції та встановіть, при яких значеннях x вона зростає, а при яких — спадає:

- а) $y = 5x$; б) $y = -x^2 + 4$; в) $y = (x + 1)(x - 1)$; г) $y = x^3 + 2$.

158. На малюнку 49 подано графік електричного навантаження житлового будинку за одну добу взимку (залежність електроспоживання від часу доби). Встановіть:

- а) проміжки спадання і зростання заданої функції; б) протягом якого часу жильці споживають найбільшу кількість електроенергії; в) в які години електричне навантаження житлового будинку не перевищує 25 %. Дізнайтеся, що таке двотарифний лічильник, як він функціонує і за яких умов його доцільно використовувати для житлових будинків.



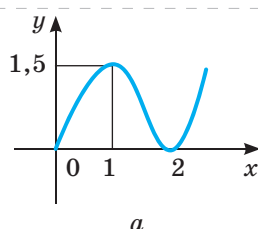
Мал. 49

159. Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:

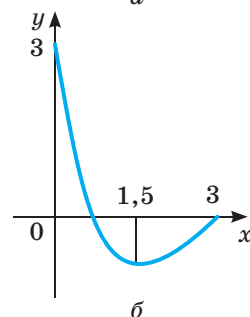
- а) $y = 5x - 1$; б) $y = -2x$; в) $y = 0,5x^2$; г) $y = x^3 - 1$.

160. Які з даних функцій оборотні, які — необоротні?

- а) $y = -x + 3$; б) $y = 6x^3$; в) $y = x^2 - 1$; г) $y = x^2 - 7x$?



а



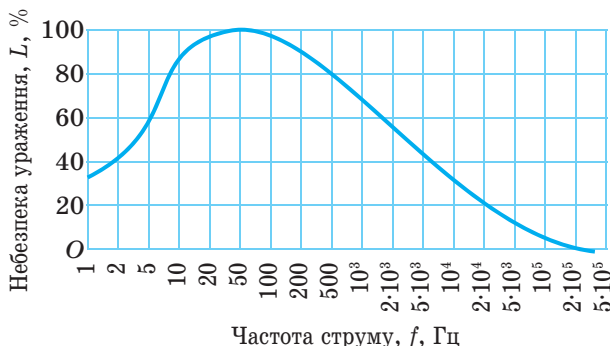
б

Мал. 48



161. На наслідки ураження людини електричним струмом впливає вид та частота струму, що проходить через тіло людини. На малюнку 50 зображено залежність ураження людини змінним струмом від його частоти. Використовуючи графік, установіть:

- зростаючою чи спадною є задана функція;
- за якої частоти небезпека ураження не перевищує 50 %;
- яка частота змінного струму небезпечніша.



Мал. 50

162. Знайдіть область визначення і область значень функції $g(x)$, оберненої до функції $f(x)$, якщо:

- $D(f) = R$, $E(f) = [-5; 12]$;
- $D(f) = (1; 6)$, $E(f) = R$.

РІВЕНЬ Б

Знайдіть область визначення функції, заданої формулою (163–164).

163. а) $y = \frac{x+7}{x^2-36}$; б) $y = \frac{2x}{1-25x^2}$; в) $y = \frac{x^2-9}{x+3}$; г) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$; ґ) $y = \frac{3}{x(x+1)}$.

164. а) $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$; б) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{|x|-2}$; в) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+5}}$; г) $y = \frac{x+1}{x^2-1}$; ґ) $y = 2\sqrt{5+x^2}$.

165. Які з функцій парні, які — непарні, які — ні парні, ні непарні:

- $y = x^3 - x$;
- $y = -x^2 + 3$;
- $y = 2x(1 - x)$;
- $y = \sqrt{x}$;
- $y = 5 \cdot x^{-2}$.

166. Функція $y = f(x)$ — непарна. На проміжку $(-\infty; -2)$ вона зростає, а на проміжку $(-2; 0)$ — спадає. Якою вона є на решті області визначення?

167. Функція $y = f(x)$ — парна. На проміжку $(-\infty; -3)$ вона спадає, а на проміжку $(-3; 0)$ — зростає. Якою вона є на решті області визначення?

168. Намалюйте схематично графік непарної функції, яка на проміжку $[-4; -2]$ зростає від 1 до 5, а на проміжку $[-2; 0]$ — спадає від 5 до -1 .

169. Намалюйте схематично графік парної функції, яка на проміжку $[-4; -1]$ спадає від 3 до -3 , а на проміжку $[-1; 0]$ — зростає від -3 до 0.

170. Знайдіть нулі функції y та інтервали її знакосталості, якщо:

- $y = x^2 + 10x - 11$;
- $y = 6x^4 - 5x^2 - 1$;
- $y = x^4 - 18x^2 + 81$;
- $y = 2x^2 + 3x - 9$.

171. За яких значень x дана функція має найменше значення:

- а) $y = x^2 - 6x + 9$; в) $y = 4x^2 - 12x - 3$;
б) $y = x^2 + 4x + 7$; г) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

172. Знайдіть найбільше значення функції:

- а) $y = 3 - (x - 2)^2$; в) $y = 6x - x^2 - 10$;
б) $y = -0,25(x + 5)^2$; г) $y = -5x^2 + 4x + 1$.

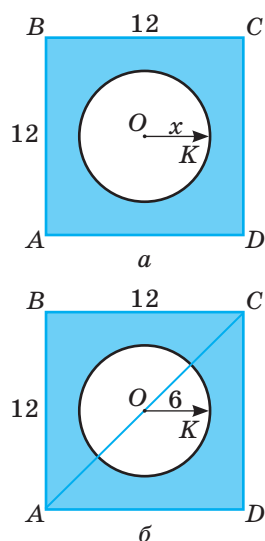
173. Не будуючи графіка функції y , установіть, за яких значень x вона набуває додатних значень:

- а) $y = 2x + 5$; в) $y = -x + 4$; г) $y = x^2 - 4$; е) $y = 4x^2 - 1$;
б) $y = 0,5x - 3$; г) $y = -3x - 2$; д) $y = \sqrt{x} - 5$; є) $y = x^2 - 7x$.

174. Побудуйте графік функції та встановіть, за яких значень x вона зростає або спадає:

- а) $y = 5x$; в) $y = (x + 1)(1 - x)$; г) $y = x^2 - 3$; е) $y = \sqrt{x}$;
б) $y = -x^2 + 4$; г) $y = x^3 + 2$; д) $y = 4 : x^2$; є) $y = x^2 + 3x$.

175. Задайте формулою функцію, що виражає залежність площі зафарбованого квадрата від:
а) радіуса вирізаного круга (мал. 51, а); б) діагоналі квадрата (мал. 51, б). Для кожної функції укажіть область визначення та область значень. Установіть, зростаючою чи спадною є кожна з цих функцій.

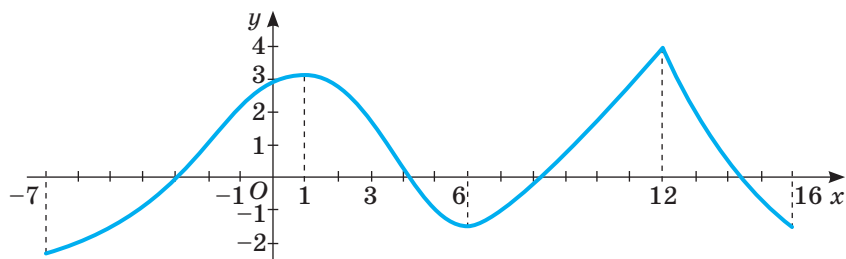


Мал. 51

176. Доведіть, що функція:

- а) $y = 3x + 5$ зростає на R ;
б) $y = 1 - \sqrt{x}$ спадає на $[0; +\infty)$;
в) $y = -x$ спадає на R ;
г) $y = 2x^2$ зростає на $[0; +\infty)$.

177. На малюнку 52 зображено графік функції $y = f(x)$. Знайдіть: а) область визначення і область значень функції; б) нулі функції; в) проміжки знакосталості; г) проміжки, на яких функція зростає; г) проміжки, на яких функція спадає; д) найбільше і найменше значення функції. Побудуйте графік функції $y = -f(x)$. Порівняйте властивості функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$.



Мал. 52

178. Виведіть формулу, яка задає функцію $g(x)$, обернену до функції $f(x)$:

а) $f(x) = 2x - 5$; б) $f(x) = 3 - 5x$; в) $f(x) = x^3 - 3$; г) $f(x) = \sqrt{x+5}$.

179. Задайте функцію, обернену до даної, та побудуйте її графік:

а) $f(x) = 4x - 3$; б) $f(x) = 4 - x$; в) $f(x) = \sqrt{x+1}$.

180. Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:

а) $y = |x^2 - 2x - 8|$; б) $y = x^2 - 4|x| + 3$; в) $y = \sqrt{|x|}$; г) $y = ||x| - 1|$.

181. Установіть відповідність між функціями (1–4) та їх властивостями (А–Д).

1	$y = x^2 - 4x + 1$	А	$E(y) = (-\infty; 2]$
2	$y = 2 - \sqrt{x+2}$	Б	Парна
3	$y = \frac{12}{ x +2}$	В	$D(y) = (2; +\infty)$
4	$y = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{ x }-2}$	Г	Найменше значення дорівнює -3
		Д	Зростає на R

РІВЕНЬ В

182. Знайдіть:

а) найбільше значення функції $y = \frac{3}{x^2 - 2x + 5}$;

б) найменше значення функції $y = \frac{1}{1 - 4x - x^2}$.

183. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = |3 - |x||$ на відрізку $[-2; 5]$.

184. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^2 - 4|x|$ на відрізку $[-1; 3]$.

185. Задайте функцію, обернену до даної, та побудуйте їх графіки:

а) $y = \begin{cases} 2x, & x \leq 0, \\ 4x, & x > 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq -1, \\ x - 2, & x > -1; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} 0,5x + 1, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & x > 0; \end{cases}$

186. За якого значення параметра a найменше значення функції $y = x^2 - 4ax + a$ дорівнює $3a$?

187. За якого значення параметра a :

а) найменше значення функції $f(x) = x^2 - 2ax + 3$ належить проміжку $[-5; 1]$;

б) найбільше значення функції $f(x) = -2x^2 - 4x + a$ належить проміжку $(-3; 10)$?

188. Відомо, що функція $y = f(x)$, визначена на множині всіх дійсних чисел, має нулі в точках -2 та 5 , зростає на проміжках $x \in (-\infty; -4]$ і $[3; +\infty]$.

та спадає на проміжку $[-4; 3]$. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції: а) $y = f(x - 4)$; б) $y = -f(x)$; в) $y = |f(x)|$; г) $y = f(|x|)$.

189. Відомо, що функція $y = f(x)$, визначена на множині всіх дійсних чисел, має нулі в точках -5 та 4 і $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$. Знайдіть нулі та проміжки знакосталості функції:

а) $y = f(x + 3)$; б) $y = -2f(x)$; в) $y = |f(x)|$; г) $y = f(|x|)$.

190. При яких значеннях параметра a має один нуль функція:

а) $y = x^2 + (3a + 1)x + 2a^2 + 3a - 2$; б) $y = (a + 1)x^2 - 3ax + 4a$?

191. При яких значеннях параметра a всі нулі функції додатні:

а) $y = x^2 + 2(2a - 1)x + 3a^2 - 8a - 3$; б) $y = ax^2 - (2 + 3a)x + 6$?

192. За якого значення параметра c функція $y = 2x^2 - cx + 5c$ зростає на проміжку $(-\infty; 2]$?

193. За якого значення параметра a функція $y = ax^2 + (a + 1)x + 1$ спадає на проміжку $[-1; +\infty)$?

Розв'яжіть рівняння (194–195).

194. а) $\sqrt{x-2} = 4 - x^2$; б) $2(x-3)^3 = 5 - \sqrt{2x+1}$.

195. а) $\sqrt{x+2} - 1 = -x^2 - 4x - 5$; б) $|x+1| + |x-3| = x^2 - 2x + 5$.

196. Доведіть, що спільні точки графіків зростаючих взаємно обернених функцій лежать на прямій $y = x$.

197. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ зростаючі і взаємно обернені, то рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильно кожному з рівнянь $f(x) = x$ або $g(x) = x$. Доведіть.

198. Розв'яжіть рівняння: а) $2\sqrt{x-2} = \frac{x^2}{4} + 1$; б) $(x-2)^2 = \sqrt{x} + 2$ при $x \geq 2$.

199. При яких значеннях параметра a графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$ мають єдину спільну точку:

а) $f(x) = 3 - |x|$ і $g(x) = x^2 + a$; б) $f(x) = a - (x - 2)^2$ і $g(x) = |x - 2| - 3$?

200. При яких значеннях параметра a має єдиний корінь рівняння:

а) $2x^2 + a|x| = a^2 - 4$; б) $(2a - 1)^2|x| - 3ax^2 + 1 = a^2$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

201. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 15y - 8z = 29, \\ 3y + 2z = 13; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 3x + 8y = 59, \\ 6x + 5y = 107. \end{cases} \end{array}$$

202. Які значення змінних задовольняють пропорцію:

$$\text{а) } (x + 1) : 2 = 4 : (x - 1); \quad \text{б) } (x - 4) : 3 = 3 : (x + 4)?$$

203. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

$$\text{а) } x^2 - 5x + 6; \text{ б) } 9a^2 + 3a - 2; \text{ в) } 2x^2 - 12x + 16; \text{ г) } 2x^2 + 5x - 3.$$

204. Порівняйте значення виразів:

$$\text{а) } 3\sqrt{10} \text{ і } 2\sqrt{22}; \text{ б) } -5\sqrt{10} \text{ і } -2\sqrt{50}; \text{ в) } 0,2\sqrt{0,1} \text{ і } 0,1\sqrt{0,2}.$$

§ 4 Ділення многочленів

Division of Polynomials

З курсу математики основної школи ви знаєте, що *многочлен* — це сума кількох одночленів. У загальному випадку $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ (де $a_0, a_1, \dots, a_n$ — дійсні числа і $a_0 \neq 0$) — многочлен n -го степеня ($n \in \mathbb{N}$) з однією змінною x .

У попередніх класах ви виконували з многочленами дії додавання, віднімання і множення. У цьому параграфі розглянемо ділення многочленів.

Багато в чому ділення многочленів нагадує ділення натуральних чисел.

Нехай $F(x)$ та $P(x)$ — деякі многочлени, причому степінь многочлена $F(x)$ не менший за степінь многочлена $P(x)$ і $P(x)$ — тотожно не дорівнює нулю. Якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $F(x) = P(x) \cdot Q(x)$, то кажуть, що многочлен $F(x)$ *ділиться* на многочлен $P(x)$ без остачі. Позначають: $F(x) : P(x)$.

Наприклад, многочлен $F(x) = x^3 - 8$ ділиться без остачі на многочлен $P(x) = x^2 + 2x + 4$, бо $F(x) = P(x) \cdot (x - 2)$.

Многочлен $F(x)$ називають *діленим*, многочлен $P(x)$ — *дільником*, а многочлен $Q(x)$ — *часткою*.

Якщо один многочлен не ділиться націло на інший, то розглядається ділення з остачею.

Поділити многочлен $F(x)$ на многочлен $P(x)$ з остачею — означає подати многочлен $F(x)$ у вигляді $F(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, де степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $P(x)$. Многочлен $R(x)$ називають остачею.

Розглянемо, як можна виконувати ділення многочлена на многочлен за допомогою алгоритму ділення «кутом» (пригадайте аналогічне правило для ділення чисел).

Приклад 1. Розділіть многочлен:

а) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ на многочлен $x^2 - x - 1$;

б) $-3x^5 + 5x^4 - 1$ на многочлен $3x^3 - 2x^2 + x - 1$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 & x^2 - x - 1 \\
 \hline
 x^4 - x^3 - x^2 & \\
 \hline
 -x^3 + 4x^2 - 2x & \\
 -x^3 + x^2 + x & \\
 \hline
 -3x^2 - 3x - 3 & \\
 -3x^2 - 3x - 3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 -3x^5 + 5x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 3x - 2 & 3x^3 - 2x^2 + x - 1 \\
 \hline
 -3x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 & \\
 \hline
 3x^4 + x^3 - x^2 + 3x & \\
 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x & \\
 \hline
 3x^3 - 2x^2 + 4x - 2 & \\
 3x^3 - 2x^2 + x - 1 & \\
 \hline
 3x - 1 &
 \end{array}$$

Відповідь. 1) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x^2 - x - 1)(x^2 - x + 3)$;

2) $-3x^5 + 5x^4 - 1 = (3x^3 - 2x^2 + x - 1)(-x^2 + x + 1) + 3x - 1$.

У першому випадку многочлени поділилися націло, що дало можливість розкласти многочлен вищого степеня (ділене) на множники. Такий підхід часто використовують під час розв'язування рівнянь виду $F(x) = 0$, де $F(x)$ — многочлен, оскільки рівняння $F(x) = 0$ і многочлен $F(x)$ мають одні й ті самі корені.

Коренем многочлена $F(x)$ називають число a , якщо виконується умова $F(a) = 0$.

З деякими властивостями коренів рівнянь і многочленів ви ознайомилися в процесі вивчення теореми Вієта. Ще одну цікаву властивість коренів рівнянь і многочленів розкриває теорема Безу.

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $F(x)$ на двочлен $x - a$ дорівнює $F(a)$.

Доведення. На основі ділення многочленів з остачою для будь-якого $x \in R$ виконується рівність $F(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, де степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $P(x)$. За умовою теореми $P(x) = x - a$ (має степінь 1), тому $R(x)$ — многочлен нульового степеня або деяке число. Тобто $F(x) = (x - a) \cdot Q(x) + r$, де r — деяке число.

Якщо в цю рівність підставити значення $x = a$, матимемо $F(a) = 0 + r = r$, що й потрібно було довести.

Наслідки з теореми Безу:

1) Многочлен $F(x)$ ділиться на $x - a$ без остачі тоді й тільки тоді, коли число a є коренем многочлена $F(x)$.

2) Якщо $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ — різні корені многочлена $F(x)$ ($F(x) \neq 0$), то $F(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot \dots \cdot (x - a_k) \cdot Q(x)$, де $Q(x)$ — деякий многочлен.

3) Остача від ділення многочлена $F(x)$ на двочлен $ax + b$ дорівнює значенню цього многочлена при $x = -\frac{b}{a}$, тобто $r = F\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Приклад 2. Знайдіть остачу від ділення многочлена:

а) $P(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ на $x - 1$;

б) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ на $2x - 1$.

Розв'язання. а) За теоремою Безу маємо: $r = P(1) = 1 + 1 + 3 + 2 + 2 = 9$;

б) за наслідком з теореми Безу маємо:

$$r = P(0,5) = 0,5^3 - 3 \cdot 0,5^2 + 5 \cdot 0,5 + 7 = 8,875.$$

Приклад 3. Доведіть, що многочлен $F(x) = x^7 - 15x^6 + 37x^4 - 16x^2 - 7$ ділиться націло на $x - 1$, але не ділиться без остачі на $x + 1$.

Розв'язання. Оскільки $F(1) = 1 - 15 + 37 - 16 - 7 = 0$, тобто $x = 1$ — корінь многочлена $F(x)$, то за наслідком 1 многочлен $F(x)$ ділиться на $x - 1$. Оскільки $F(-1) = -1 - 15 + 37 - 16 - 7 = -2$, то многочлен $F(x)$ не ділиться без остачі на $x + 1$.

Теорема Безу дає змогу знайти остачу від ділення многочлена $F(x)$ на двочлен, не виконуючи самого ділення. Але вона не дає можливості знайти частку від цього ділення. Ділення многочлена на двочлен, що замінює

ділення «кутом», можна здійснити за схемою, яка називається *схемою Горнера* (детальніше про це в рубриці «Хочете знати більше»).

Ділення многочленів і розкладання їх на множники використовують під час розв'язування цілих раціональних рівнянь і нерівностей. Для розв'язування окремих видів рівнянь зручно користуватися таким правилом.

Якщо ціле раціональне рівняння з цілими коефіцієнтами має цілі корені, то вони є дільниками вільного члена.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = 0$.

Розв'язання. Дільниками його вільного члена є числа $-5, -1, 1$ і 5 . Додатні числа не можуть бути коренями цього рівняння, бо всі його члени мають додатні коефіцієнти, а сума додатних чисел — число додатне.

Залишилось перевірити два числа: -5 і -1 .

Якщо $x = -1$, то $(-1)^3 + 6(-1)^2 + 10(-1) + 5 = -1 + 6 - 10 + 5 = 0$.

Отже, $x = -1$ — корінь рівняння $x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = 0$.

У цьому випадку многочлен $x^3 + 6x^2 + 10x + 5$ можна поділити на многочлен $x - (-1) = x + 1$ без остачі.

Маємо: $x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = (x + 1)(x^2 + 5x + 5)$, тобто рівняння $x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = 0$ і $(x + 1)(x^2 + 5x + 5) = 0$ рівносильні. Останнє рівняння рівносильне сукупності рівнянь $x + 1 = 0$ і $x^2 + 5x + 5 = 0$.

1) $x + 1 = 0$, $x_1 = -1$;

2) $x^2 + 5x + 5 = 0$, $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2}$.

Відповідь. $\left\{1; \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

Це рівняння можна розв'язати, розклавши ліву частину на множники іншим способом. Зробіть це самостійно.

$x^3 + 6x^2 + 10x + 5$	$x + 1$
$x^3 + x^2$	$x^2 + 5x + 5$
$5x^2 + 10x$	
$5x^2 + 5x$	
$5x + 5$	
$5x + 5$	
0	

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Якщо многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ поділити на $x - a$, то для будь-якого $x \in R$ правильною буде рівність

$P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x - a) + r$. Тобто:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = (a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1})(x - a) + r,$$

$$\text{або } a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = a_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x - a_0ax^{n-1} - b_1ax^{n-2} - \dots - b_{n-2}ax - b_{n-1}a + r.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, отримаємо співвідношення між a_n і b_n і внесемо їх у таблицю.

	a_0	a_1	$\dots$	a_{n-1}	a_n
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = a \cdot b_0 + a_1$	$\dots$	$b_{n-1} = a \cdot b_{n-2} + a_{n-2}$	$r_0 = a \cdot b_{n-1} + a_n$

Такий алгоритм визначення частки й остачі при діленні многочлена на двочлен називають схемою Горнера (на честь англійського математика Вільяма Джорджа Горнера).

Приклад. Поділити многочлен $-x^5 + 4x^3 + 32 - 8x^2$ на $x + 2$ за схемою Горнера. Запишемо коефіцієнти діленого в перший рядок таблиці. Дільник подамо у вигляді $x + 2 = x - (-2)$. Число -2 запишемо в першому стовпчику. Виконаємо дії, зазначені в таблиці.

	-1	0	4	-8	0	32
-2	-1	2	0	-8	16	0

Отримали частку $-x^4 + 2x^3 - 8x + 16$. Цей многочлен ділиться на $x - 2$. Виконайте це ділення самостійно, склавши аналогічну таблицю або продовживши попередню.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- 1. Що таке многочлен?
- 2. Що називають коренем многочлена?
- 3. Сформулюйте теорему Безу.
- 5. Сформулюйте наслідки з теореми Безу.
- 6. Яку властивість мають цілі корені цілого раціонального рівняння з цілими коефіцієнтами?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1 Розв’яжіть рівняння $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 = 0$.

Розв’язання. Дільниками вільного члена рівняння є числа: $\pm 1; \pm 3; \pm 9$. Додатні числа не можуть бути коренями цього рівняння (перевірте). Підстановкою переконаємося, що числа -1 і -3 є коренями цього рівняння, а тому многочлен $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9$ ділиться націло на многочлен $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$. Виконаємо ділення кутом, або почергово схемою Горнера.

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 \\ x^4 + 4x^3 + 3x^2 \\ \hline -6x^3 - 21x^2 - 6x \\ -6x^3 - 24x^2 - 18x \\ \hline 3x^2 - 12x + 9 \\ 3x^2 + 12x + 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

	1	-2	-18	-6	9
-1	1	-3	-15	9	0
-3	1	-6	3	0	

Маємо: $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 = (x + 1)(x + 3)(x^2 - 6x + 3)$.

Рівняння $x^2 - 6x + 3 = 0$ має корені $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{6}$.

Відповідь. $x_1 = -1, x_2 = -3, x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{6}$.

- 2 Знайдіть усі цілі значення a і b , при яких многочлен

$$F(x) = x^3 + ax^2 - x + b \text{ ділиться на } x^2 - 1.$$

Розв'язання. Якщо многочлен $F(x)$ ділиться на $x^2 - 1$, то ділиться на $x - 1$ і на $x + 1$. Тому $F(1) = 0$ і $F(-1) = 0$. Для цілих a і b маємо:

$$\begin{cases} 0 = 1 + a - 1 + b, \\ 0 = -1 + a + 1 + b, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a + b = 0, \\ a + b = 0, \end{cases} \text{ звідси } \begin{cases} a \in \mathbb{Z}, \\ b = -a. \end{cases}$$

Відповідь. $b = -a$, $a \in \mathbb{Z}$.

- 3 Знайдіть за схемою Горнера неповну частку і остачу від ділення многочлена $x^5 - x^3 + x - 3$ на двочлен $x + 1$.

Розв'язання.

	1	0	-1	0	1	-3
-1	1	-1	0	0	1	-4

Відповідь. $x^5 - x^3 + x - 3 = (x + 1)(x^4 - x^3 + 1) - 4$.

Виконайте усно

205. На який із двочленів ділиться многочлен $x^3 + 8$? А $x^3 - 8$?
а) $x + 8$; б) $x - 4$; в) $x + 4$; г) $x + 2$; ґ) $x - 2$.
206. На який многочлен ділиться многочлен $x^3 + 2x^2 + x$?
а) $x + 2$; б) $x - 2$; в) $x + 1$; г) x ; ґ) $x - 1$; д) $x^2 + 2x + 1$.
207. Знайдіть частку від ділення многочлена $P(x)$ на $Q(x)$, якщо:
а) $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x + 1$; б) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 + x + 1$;
в) $P(x) = x^4 - 1$, $Q(x) = x^2 - 2x + 1$; г) $P(x) = x^4 - 1$, $Q(x) = x - 1$.
208. Назвіть дільники вільного члена многочлена $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 12$.
209. Чи ділиться многочлен $x^5 + 6x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 12$ на двочлен $x - 5$?

Рівень А

210. Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^4 + x^3 - 3x^2 - 7x - 6$ на двочлен:
а) $x + 1$; б) $x - 2$; в) $x + 3$; г) $x - 4$.
211. Знайдіть остачу від ділення многочлена $3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 5x - 2$ на двочлен:
а) $x + 1$; б) $x - 2$; в) $x + 3$; г) $x - 4$.
212. Доведіть, що многочлен $F(x)$ ділиться націло на двочлен $P(x)$, якщо:
а) $F(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$, а $P(x) = x - 2$;
б) $F(x) = x^3 + 4x^2 - x - 6$, а $P(x) = x + 3$.
213. Доведіть, що многочлен $F(x)$ ділиться націло на многочлен $P(x)$, якщо:
а) $F(x) = 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 2x + 20$, а $P(x) = x + 2$;
б) $F(x) = 3x^3 + 4x^2 - x - 6$, а $P(x) = x - 3$.
214. Доведіть, що многочлен $F(x)$ не ділиться націло на двочлен $P(x)$, якщо:
а) $F(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$, а $P(x) = x - 2$;
б) $F(x) = 4x^3 + x^2 - x - 6$, а $P(x) = x + 3$.

215. Знайдіть неповну частку та остачу від ділення многочлена $x^2 - 4x - 6$ на многочлен:

а) $x + 1$; б) $x - 2$; в) $x + 3$; г) $x - 4$.

216. Знайдіть неповну частку та остачу від ділення многочлена $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ на многочлен:

а) $x - 1$; б) $x + 1$; в) $x - 3$; г) $x + 4$.

217. Виконайте ділення «кутом»:

а) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ на $x + 1$; $x - 3$; $x - 5$;

б) $2x^3 + x^2 - 13x + 6$ на $x + 3$; $x - 2$; $2x - 1$.

218. Доберіть цілий корінь рівняння:

а) $x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 8 = 0$; б) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5x - 1 = 0$.

Розв'яжіть рівняння (219–221).

219. а) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0$; б) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$.

220. а) $2x^3 + 3x^2 + 6x + 5 = 0$; б) $x^4 + 2x^3 - 8x - 16 = 0$.

221. а) $x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$; б) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x = 0$.

РІВЕНЬ Б

222. Знайдіть остачу від ділення многочлена $3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 5x - 2$ на двочлен:

а) $3x + 1$; б) $3x - 1$; в) $3x + 2$; г) $3x - 2$.

223. Знайдіть остачу від ділення многочлена $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8$ на многочлен:

а) $x^2 + 2x - 2$; б) $5x^2 + x + 4$; в) $2x + 5$; г) $3x - 2$.

Виконайте ділення «кутом» (224–225).

224. $4x^4 + 12x^3 - 47x^2 + 12x + 4$ на:

а) $2x^2 - 5x + 2$; б) $2x^2 + 11x + 2$; в) $4x^3 + 20x^2 - 7x - 2$.

225. $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8$ на: а) $x^2 + x - 2$; б) $5x^2 + 4x + 4$; в) $5x^3 - x^2 - 4$.

226. Знайдіть кратність кореня $x = 2$ для многочлена $P(x)$, якщо:

а) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$; б) $P(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$.

Розкладіть многочлен на множники (227–228).

227. а) $x^4 + 4x^3 + x^2 + 6x$; б) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50$.

228. а) $x^4 + 9x^3 + 23x^2 + 15x$; б) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 24x^2 - 27x - 108 = 0$.

Розв'яжіть рівняння (229–232).

229. а) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$; б) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$;

в) $x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x - 3 = 0$.

230. а) $x^4 + x^3 - x^2 - x = 0$; б) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$;

в) $x^5 - 2x^4 - x^3 - 8x^2 + 16x + 8 = 0$.

231. а) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 - x = 0$; б) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$;

в) $x^6 - 4x^4 - x^3 + 4x = 0$.

232. а) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = 0$; б) $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8 = 0$;

в) $x^6 - x^4 - 8x^3 + 8x = 0$.

233. Доведіть, що многочлен $x^n - a^n$ ділиться на $x - a$ без остачі при будь-якому n , $n \in \mathbb{N}$.

РІВЕНЬ В

234. Доведіть тотожність:

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 + \dots + a^{m-1}, \quad m \in N.$$

Розв'яжіть рівняння (235–236).

235. а) $\frac{2x^3 - 7x^2 + 3x + 6}{x^2 - 3x + 2} = 2x;$

б) $\frac{x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 16x + 11}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x + 5}{x^2 - 3x + 2}.$

236. а) $\frac{2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + 4}{x^3 + x^2 - x - 1} = 2x;$

б) $\frac{2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 2}{x(x-1)} = \frac{3x-2}{x-x^2}.$

237. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12};$

б) $y = \frac{\sqrt{3 - |x - 2|}}{x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12}.$

238. Побудуйте графік функції:

а) $y = \left| \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x - 6}{x^2 + 2x - 3} - 4 \right|;$

б) $y = \left| 2 - \sqrt{\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}} \right|.$

239. При яких значеннях a і b многочлен:

$x^4 + ax^3 + bx^2 + 3x - 9$ ділиться без остачі на $x^2 - 4x + 3$.

240. При яких значеннях a і b многочлен $2x^3 + ax^2 - 8x + 6$ ділиться без остачі на $x^2 - 5x + 6$?

241. При якому значенні a многочлен:

а) $x^3 - 2x^2 - ax + 6$ ділиться без остачі на $x^2 + x + 2$;

б) $x^3 + 6x^2 + ax + 5$ ділиться без остачі на $x^2 + x + 1$?

242. При яких значеннях a і b многочлен $x^3 + ax^2 + 2bx + a + b$ при діленні на $x - 1$ дає в остачі 4, а при діленні на $x - 2$ дає в остачі 3?

243. Остачі від ділення многочлена $P(x)$ на двочлени $x - 2$ і $x - 4$ відповідно дорівнюють 3 і 5. Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 - 6x + 8$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

244. Побудуйте графік функції $y = (x + 3)^2 + 2$. Знайдіть проміжки знакосталості та монотонності. Чи має функція найменше значення? А найбільше?

245. Обчисліть: а) $(\sqrt{12} - \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$; б) $(\sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}})^2$.

246. Розв'яжіть нерівність: $6(x - 1) - 4(x + 2) > -9(x + 1) + x$.



247. Волонтерство — добровільна безкорисна суспільно корисна діяльність. В Україні 80 % волонтерів складає молодь, з яких 72 % — жінки. Який відсоток усіх волонтерів становлять молоді чоловіки? Чи займалися ви чи хто-небудь з вашої родини волонтерством?

§ 5 Метод інтервалів

Interval Method

Деякі види нерівностей (лінійні, квадратні) ви навчилися розв'язувати в попередніх класах. Розглянемо більш загальний метод розв'язування нерівностей — *метод інтервалів*.

Для початку розв'яжемо одну з нерівностей графічно.

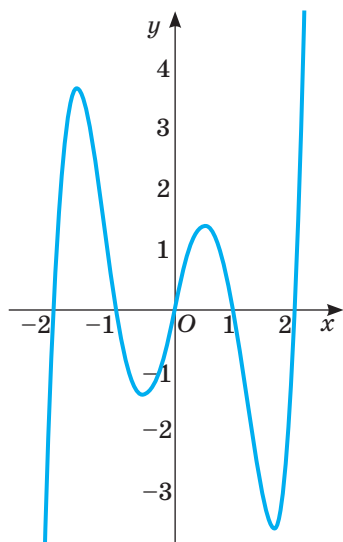
Приклад 1. Розв'яжіть графічно нерівність

$$x(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2) > 0.$$

Розв'язання. Графік функції $y = x(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2)$ зображений на малюнку 54. Це неперервна (суцільна) крива, що перетинає вісь x у точках -2 , -1 , 0 , 1 і 2 . На графіку добре видно проміжки знакосталості. Якщо аргумент x належить проміжкам $(-2; -1)$, $(0; 1)$ і $(2; \infty)$, то функція набуває додатних значень. В інших точках значення функції від'ємні або дорівнюють 0 .

Отже, розв'язком нерівності $x(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2) > 0$ є множина $(-2; -1) \cup (0; 1) \cup (2; \infty)$ (мал. 53).

Чи завжди потрібно будувати графік, щоб встановити проміжки знакосталості для функції, що задається многочленом чи добутком кількох многочленів? Ні. Використовують таку властивість: *Якщо функція $f(x)$ неперервна і не дорівнює нулю в жодній точці проміжку $(a; b)$, то вона на цьому проміжку зберігає знак.* Тобто, її значення на всьому проміжку тільки додатні або тільки від'ємні. Доведення цієї властивості є в курсах математичного аналізу. Ми ж обмежимося тільки наочним поясненням. Якщо графік неперервної функції на проміжку $(a; b)$ не перетинає вісь Ox , то весь він на цьому проміжку розміщується вище від осі Ox , або нижче від неї.



Мал. 53

На цій властивості неперервних функцій ґрунтується і *метод інтервалів*, яким зручно розв'язувати нерівності.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $(x - 2)(x + 3)(x + 5) < 0$.

Розв'язання. Функція $f(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 5)$ визначена на R .

Її значення дорівнюють нулю в трьох точках: $x = -5$, $x = -3$ і $x = 2$. Ці точки числову вісь R розбивають на 4 проміжки: $(-\infty; -5)$, $(-5; -3)$, $(-3; 2)$, $(2; \infty)$. У кожному з цих проміжків значення функції $f(x)$ не до-

рівнює 0, тому на кожному з цих проміжків функція $f(x)$ зберігає знак. Які саме знаки, неважко визначити й усно: $f(-10) < 0$, $f(-4) > 0$, $f(0) < 0$, $f(10) > 0$. Отже, схематично графік функції $y = f(x)$ можна зобразити, як показано на малюнку 54. Дивлячись на малюнок, відразу можна написати відповідь:



Мал. 54

$$(-\infty; -5) \cup (-3; 2).$$

Зауваження. Не треба думати, що знаки неперервної функції $f(x)$ в сусідніх проміжках завжди різні. Інколи у суміжних проміжках знаки функції однакові. Подібне трапляється, коли функція містить парні степені множників чи їх модулі. Адже вони невід'ємні і на знак функції не впливають.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3) \geq 0$.

Розв'язання. Функція $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)$ визначена на R .

Її значення дорівнюють нулю в трьох точках: $x = 1$, $x = 2$ і $x = 3$. Ці точки числову вісь R розбивають на 4 проміжки: $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; \infty)$. На кожному з цих проміжків функція $f(x)$ зберігає знак: $f(0) > 0$, $f(1,5) < 0$, $f(2,5) < 0$, $f(4) > 0$.

Отже, схематично графік функції $y = f(x)$ можна зобразити, як показано на малюнку 55, дивлячись на який відразу можна написати відповідь:



Мал. 55

$$(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty).$$

Описаний спосіб розв'язування нерівності називають *методом інтервалів*.

За допомогою методу інтервалів розв'язують нерівності, у яких одна частина є неперервною функцією, а інша — нулем. Насамперед це стосується цілих раціональних нерівностей, оскільки їх можна звести до вигляду $P(x) < 0$ або $P(x) > 0$, де $P(x)$ — ціла раціональна функція, яка завжди неперервна на множині R .

Щоб розв'язати цілу раціональну нерівність $P(x) < 0$, користуються таким алгоритмом:

1) знайти точки, у яких функція $P(x)$ дорівнює нулю (тобто розв'язати рівняння $P(x) = 0$);

2) на числову вісь нанести знайдені точки, які розбивають її на проміжки, на кожному з яких функція $P(x)$ зберігає знак;

3) на кожному з проміжків вибрати по одній точці, визначити знак функції $P(x)$ у цих точках, а отже і на відповідному проміжку;

4) вибрати проміжки, на яких $P(x) < 0$, і записати відповідь у вигляді об'єднання цих проміжків.

Аналогічно розв'язують нерівності виду $P(x) > 0$, $P(x) \leq 0$ або $P(x) \geq 0$.

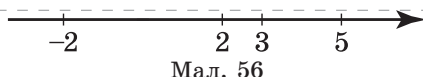
Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $(x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15) < 0$.

Розв'язання. 1) Знайдемо корені рівняння $(x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15) = 0$ як корені сукупності рівнянь $x^2 - 4 = 0$ або $x^2 - 8x + 15 = 0$. Маємо:

$$x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 5;$$

2) нанесемо знайдені точки на числову вісь: утворилося п'ять проміжків (мал. 56);



Мал. 56

3) виберемо по одній точці на кожному з проміжків і визначимо знак функції $y = (x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15)$ у цих точках: $-3 \in (-\infty; -2)$, $y(-3) = 5 \cdot 48 > 0$; $0 \in (-2; 2)$, $y(0) = -4 \cdot 15 < 0$; $2,5 \in (2; 3)$, $y(2,5) = 2,25 \cdot 1,25 > 0$; $4 \in (3; 5)$, $y(4) = 12 \cdot (-1) < 0$; $6 \in (5; +\infty)$, $y(6) = 32 \cdot 3 > 0$.

Поставимо відповідні знаки на кожному із проміжків (мал. 57).

4) виберемо проміжки, на яких функція $y = (x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15)$ має знак «-», і запишемо відповідь як об'єднання відповідних проміжків.



Мал. 57

Відповідь. $(-2; 2) \cup (3; 5)$.

Примітка. Множина розв'язків нерівності $(x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15) \leq 0$ містить точки $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, а тому має вигляд: $[-2; 2] \cup [3; 5]$.

За допомогою малюнка 57 легко записати множини розв'язків нерівностей $(x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15) > 0$ і $(x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15) \geq 0$.

Це множини: $(-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup (5; +\infty)$ і $(-\infty; -2] \cup [2; 3] \cup [5; +\infty)$.

Оскільки дробово-раціональна функція не завжди визначена на всій множині R , то для розв'язування дробових нерівностей (особливо нестрогих) зручно користуватися рівносильним переходом до змішаної системи, яка містить цілу нерівність і умову нерівності знаменника нулю. З цією метою обидві частини дробово-раціональної нерівності $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ домножують (усно)

на квадрат знаменника. Маємо:
$$\begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $\frac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \geq 0$.

Розв'язання.
$$\left(\frac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \geq 0 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} (5x^2 - 2x - 3) \cdot (x^2 + x - 2) \geq 0, \\ x^2 + x - 2 \neq 0. \end{cases}$$

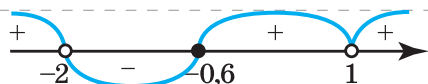
Спростимо ліву частину нерівності $(5x^2 - 2x - 3)(x^2 + x - 2) \geq 0$, розклавши на множники многочлени $5x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(5x + 3)$ і $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Отримаємо рівносильну їй нерівність $(x - 1)^2(x + 2)(5x + 3) \geq 0$. Розв'яжемо її за вище описаним алгоритмом.

Рівняння $(x - 1)^2(x + 2)(5x + 3) = 0$ має корені $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -0,6$. Відкладемо їх на числовій прямій у вигляді зафарбованих і порожніх кружечків, урахувавши умову нерівності знаменника нулю. За допомогою окремих точок знайдемо знак функції $y = (x - 1)^2(x + 2)(5x + 3)$ на кожному з утворених проміжків (мал. 58).

Вибираємо проміжки, на яких функція $y = (x - 1)^2(x + 2)(5x + 3)$ має знак «+», і записуємо відповідь як об'єднання відповідних проміжків і чисел, які відповідають зафарбованим кружечкам.

Відповідь. $(-\infty; -2) \cup [-0,6; 1) \cup (1; +\infty)$.

Примітка. Якщо праву частину нерівності $\frac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \geq 0$ скоротити на $x - 1$, то одержимо нерівність $\frac{5x + 3}{x + 2} > 0$, яка не рівносильна даній.



Мал. 58

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. У чому полягає сутність методу інтервалів?
2. Як розв'язати цілу нерівність методом інтервалів?
3. Як розв'язати методом інтервалів дробову нерівність?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1 Розв'яжіть нерівність $2x^5 - 21x^4 + 74x^3 - 105x^2 + 50x > 0$.

Розв'язання. Внесемо змінну x за дужки у многочлені в лівій частині. Маємо: $2x^5 - 21x^4 + 74x^3 - 105x^2 + 50x = x(2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50)$. Випишемо дільники вільного члена многочлена, що у дужках, і знайдемо його корені: $\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10 \dots$

Від'ємні числа не можуть бути коренями цього многочлена (обґрунтуйте). Перевіркою встановлюємо, що коренями є числа 1 і 2. Ще 2 корені (5 і 2,5) знаходимо, скориставшись схемою Горнера чи діленням кутом. Отже, многочлен, що стоїть у лівій частині, має 5 коренів (0; 1; 2; 2,5; 5). Відкладемо їх на числовій прямій у вигляді порожніх кружечків. За допомогою окремих точок знайдемо знак функції $y = 2x^5 - 21x^4 + 74x^3 - 105x^2 + 50x$ на кожному з утворених проміжків, скориставшись EXCEL (мал. 59).

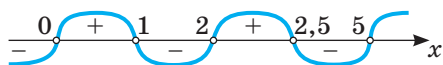
Маємо: $f(-1) < 0$, $f(0,5) > 0$; $f(1,5) < 0$, $f(2,25) > 0$, $f(2,75) < 0$, $f(6) > 0$.

Використовуючи малюнок 60, можемо записати розв'язки нерівності $(0; 1) \cup (2; 2,5) \cup (5; \infty)$.

Відповідь. $(0; 1) \cup (2; 2,5) \cup (5; \infty)$.

x	f(x)
-1	-252,00
0,5	6,75
1,5	-2,63
2,25	0,97
2,75	-4,06
6	840,00

Мал. 59



Мал. 60

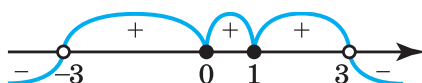
2 Розв'яжіть нерівність $\frac{x^4 - 2x^3 + 9}{9 - x^2} \leq 1$.

Розв'язання. Перенесемо всі члени нерівності в ліву частину і зведемо їх до спільного знаменника. Отримаємо рівносильну нерівність $\frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{9 - x^2} \leq 0$

або $\frac{x^2(x^2 - 2x + 1)}{(3 - x)(3 + x)} \leq 0$, $\frac{x^2(x - 1)^2}{(3 - x)(3 + x)} \leq 0$. Остання нерівність рівносильна сис-

темі $\begin{cases} x^2(x - 1)^2(3 - x)(3 + x) \leq 0, \\ (3 - x)(3 + x) \neq 0. \end{cases}$

Позначимо на числовій осі точки 0, 1, 3 і -3 і визначимо знак лівої частини нерівності на кожному з утворених інтервалів (мал. 61).



Мал. 61

Вибираємо проміжки зі знаком «-» і записуємо відповідь як об'єднання відповідних проміжків і чисел, які відповідають зафарбованим кружечкам.

Відповідь. $(-\infty; -3) \cup \{0; 1\} \cup (3; +\infty)$.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

248. Чи є розв'язком нерівності $3x - 2 > 5x + 1$ число:

а) 0; б) -10; в) 10; г) $(-2)^2$; ґ) -2^2 ?

249. Чи має розв'язки нерівність:

а) $x^4 \leq 0$; б) $|x| \geq -10$; в) $x^2 < 0$; г) $x^2 > -1$; ґ) $|x - 1| < -1$?

Розв'яжіть нерівність (250–252).

250. а) $2x \leq 5$; б) $15 \geq 3x$; в) $-5x < 10$; г) $-0,5x > 1$.

251. а) $x + 2 \leq 5$; б) $15 \geq 3 + x$; в) $-5 + x < 10$; г) $x - 1 > 1$.

252. а) $x^2 < 1$; б) $x^2 > 4$; в) $x^3 \geq 8$; г) $x^3 < -1$.

253. Чи рівносильні нерівності:

а) $x^2 - 4 \leq 0$ і $x \leq 2$; б) $-0,5x > 1$ і $4x + 8 < 0$; в) $x^2 - 5 < 0$ і $(x - 5)^2 < 0$?

РІВЕНЬ А

254. Які з чисел -3; -2; -1; 0,1; 2; 3 задовольняють нерівність:

а) $3x > 7$; б) $-2x < 5$; в) $x + 2 \geq 0$; г) $5 - x < 0$?

255. Які з чисел -2; $-\sqrt{3}$; -1; 0; 1 задовольняють нерівність:

а) $7x - 5 > 2x + 3$; б) $5 - 3x \geq x - 1$; в) $x^2 < 3x + 1$?

256. Яке найменше натуральне число є розв'язком нерівності:

а) $4(x - 1) < 7x + 2$;

в) $2(3x - 5) \geq 5(2x - 3)$;

б) $4x - 9 \geq 3(x - 2)$;

г) $5(x - 2) + 2 > 3x$?

257. Яке найбільше натуральне число є розв'язком нерівності:

- а) $4(x + 2) > 5(x - 1)$; в) $3(2x - 4) \geq 9x - 17$;
 б) $7(x - 1) \leq 17 + 5x$; г) $0,3(x - 2) > 0,5(x - 3)$?

Розв'яжіть нерівність (258–261).

258. а) $x^2 + 2x > 0$; б) $x^2 - x \geq 0$; в) $2x^2 + 5x \leq 0$; г) $3x^2 - x < 0$.

259. а) $x^2 - 3x + 2 > 0$; в) $x^2 + 5x + 6 < 0$;
 б) $x^2 - x - 2 < 0$; г) $x^2 + 2x - 15 \geq 0$.

260. а) $3x^2 - x - 4 \geq 0$; в) $5x^2 - 2x - 3 > 0$;
 б) $6x^2 + 5x + 1 < 0$; г) $10x^2 - 9x + 2 \leq 0$.

261. а) $x^2 + 10x + 25 \geq 0$; в) $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$;
 б) $4x^2 - 12x + 9 < 0$; г) $x^2 - 4x + 4 > 0$.

Знайдіть розв'язки нерівності (262–265).

262. а) $(2x + 1)(x + 1) > 0$; в) $(3x - 2)(2x + 3) > 0$;
 б) $(x - 7)(3x + 1) < 0$; г) $(2x - 5)(3x - 6) > 0$.

263. а) $(x - 1)(2 - x) > 0$; в) $(3 + x)(x + 7) < 0$;
 б) $(3 - x)(5 + x) \leq 0$; г) $(5 - x)(1 - x) \geq 0$.

264. а) $\frac{x+3}{x-7} > 0$; б) $\frac{x}{x+2} > 0$; в) $\frac{2+x}{x+3} < 0$; г) $\frac{2+x}{x+3} < 2$; г) $\frac{x}{x+2} > 2$;

265. а) $\frac{7x}{2x+5} > 1$; б) $\frac{x^2}{x+5} < 0$; в) $\frac{x^2+1}{x-7} > 0$; г) $\frac{x+3}{x-7} > 1$; г) $\frac{3x-4}{x} < 1$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів (266–269).

266. а) $(5 + x)(x - 7)(x + 3) > 0$; в) $(x + 2)(x + 1)(x - 5) \leq 0$;
 б) $(x - 7)(x + 3)(x - 1) < 0$;

267. а) $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \leq 0$; в) $(x - 2)(x + 1)(x - 11) < 0$;
 б) $(x + 1)(x - 3)(x + 6) > 0$;

268. а) $x(x - 3)(x + 2) < 0$; в) $(x - 4)(x - 5)(x - 6) \geq 0$;
 б) $(x - 2)(x + 1)(x - 1) \geq 0$;

269. а) $(2x - 3)(3x - 5)(x + 6) \leq 0$; в) $(3x - 4)(2x + 3)(x - 7) \geq 0$;
 б) $x(x + 4)(x^2 + 2) < 0$;

РІВЕНЬ Б

270. Які натуральні значення x задовольняють нерівність:

- а) $2(x + 7) + 3(1 - 2x) \geq 1$; в) $2(x + 1) \geq 3 - (1 - 2x)$.
 б) $3(3x - 2) - 4(x + 1) < 2x$;

271. Чи рівносильні нерівності:

- а) $\frac{x-1}{2x+3} \leq 0$ і $(x - 1)(2x + 3) \leq 0$; б) $\frac{3-x}{x} \geq 1$ і $3 - x \geq x$?

Розв'яжіть нерівність (272–273).

272. а) $(x - 1)(x^2 - 2x - 4) > 0$; в) $(2x^2 - 6x + 3)(x - 1) < 0$;
 б) $(x + 1)(1 - 4x - 5x^2) \geq 0$; г) $(-3x^2 + 5x + 2)(x + 1) < 0$;

273. а) $(x + 2)(x^2 - 10x + 35) < 0$; в) $(3x^2 + 3x + 5)(x + 2) > 0$;
 б) $(x - 2)(-x^2 + 2x - 1) < 0$; г) $(3x - 7x^2 - 5)(x - 2) \leq 0$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів (274–279).

274. а) $(5+x)^2(x-7)(x+3) > 0$; в) $x^3(x-7)(x+3)(x-1) \leq 0$;

б) $(x+2)(x+1)(x-5)^3 < 0$; г) $x^2(x+3)(2x-4)(x-6) \geq 0$.

275. а) $(x+1)(x^2-2x+3) \leq 0$; в) $(x-2)(3x^2+x-2)^2 \geq 0$;

б) $(x^2-x-2)(x-1,5) < 0$; г) $(5x^2+2x-3)(x+6)^2 \geq 0$.

276. а) $(5-x)(x-7)^3(x+1) > 0$; в) $(x-x^2)(x+3)(x-1) \leq 0$;

б) $(2-x)^3(x+1)(x-5) < 0$; г) $(x^2-4)(x+3)(2x-4) \geq 0$.

277. а) $(1-x)^2(x+7)(x+3) > 0$; в) $x(x-4)(x+5)(x-1) \leq 0$;

б) $(x+3)(x+1)(x-5)^3 < 0$; г) $x^2(x+3)(x-4)(x-6) \geq 0$.

278. а) $(x-1)(x^2-2x+3) \leq 0$; в) $(x-2)(5x^2-x-4)^2 \geq 0$;

б) $(x^2-x-1)(x-1,5) < 0$; г) $(5x^2+2x-3)(x+6)^2 \geq 0$.

279. а) $(5-x)(x-3)^3(x+1) > 0$; в) $(x-x^2)(x+3)(x-1) \leq 0$;

б) $(3-x)^3(x+1)(x-5) < 0$; г) $(x^2-4)(x+3)(2x-4) \geq 0$.

Розв'яжіть нерівність (280–281) і встановіть кількість її цілих розв'язків з проміжку $[-5; 5]$.

280. а) $\frac{x(x-1)(x+2)}{(x+3)(1-x)} > 0$; б) $\frac{(x-2)(x-3)}{x(x^2+x+1)} > 0$; в) $\frac{x^2-3x+2}{x(x-2)(x+3)} \leq 0$.

281. а) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)} > 0$; б) $\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+5)} > 0$; в) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+3)} \leq 0$.

Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність (282–285).

282. а) $\frac{x(x-1)(x+2)}{(x+3)(x-1)} \leq 0$; б) $\frac{(x-2)(x-3)}{x(x^2+x+1)} > 0$; в) $\frac{(x-2)(x-3)}{(2+x-x^2)(x+5)} \geq 0$.

283. а) $x + \frac{2}{x} > 3$; б) $x + 3 < \frac{4}{x}$; в) $\frac{3x^2+x-14}{x+1} \geq -5$; г) $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-1} < \frac{2}{x^2-1}$.

284. а) $\frac{1}{x-1} < 1$; б) $\frac{1}{x} \geq 2$; в) $\frac{3x+2}{2x-1} \geq \frac{1}{2}$; г) $\frac{4}{1+x} - \frac{x}{1-x} \leq \frac{2}{x^2-1}$.

285. а) $\frac{6}{x^2} + 2 \leq \frac{7}{x}$; б) $\frac{4}{x} + \frac{3}{x+3} \geq 1$; в) $\frac{5}{x+3} - 2 \leq \frac{x}{x-1}$; г) $\frac{2x+2}{x-5} + \frac{4x+5}{x+2} \geq 1$.

РІВЕНЬ В
Розв'яжіть нерівність (286–287).

286. а) $(x+1)^2(4x+5) \geq (2x-1)^2(x+5)$;

б) $x^2(8x-2) - (2x+3)(2x-1)^2 \leq 1$.

287. а) $(x-1)^3 - x(x+2)^2 \geq -7$; б) $(x+1)^2(2x+5) \leq 2x^2+2$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів (288–292).

288. а) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 < 0$; в) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 < 0$;

б) $x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 > 0$; г) $2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 2x \geq 0$.

289. а) $\frac{x^2-3x+2}{x(x-2)(x+3)} \leq 0$; б) $\frac{(x^2-9)(x+3)}{(2x^2+6x)(1-x)} \geq 0$; в) $\frac{(x-2)(x-3)}{(2+x-x^2)(x+5)} \geq 1$.

290. а) $\frac{(x^2-1)(x^2-4x+4)}{2x^2-x-1} \geq 0$; б) $\frac{(x-2)(x+7)}{x+8} \geq 1$; в) $\frac{x(3+x)(x+3)}{(x-1)^2(x^2+4x+3)} \geq 0$.

291. а) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+4} < 1$; б) $\frac{1}{x^2-6x+8} < \frac{1}{8}$; в) $\frac{x^2+5x+5}{2x^2+5x} \leq 1$.

292. а) $\frac{x^2+6x+5}{x^2-4x+4} \geq \frac{10x+1}{(x-2)^2}$; б) $\frac{x^2-x}{x^2-x+1} \geq \frac{2(x^2-x)}{x^2-2x-2}$.

Розв'яжіть нерівність з модулем (293–294).

293. а) $\left| \frac{2x^2+8x-6}{x^2+4x+3} \right| \geq 2$; б) $\left| \frac{x^2-10x+9}{x^2-9} \right| \leq 1$; в) $\frac{x^2-|2x-3|}{x^2-|2-x|} \leq 1$.

294. а) $\left| \frac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4} \right| \leq 1$; б) $\left| \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-4} \right| \geq 1$; в) $\frac{|x^2+2x|+4}{x^2+|x+2|} \geq 1$.

Знайдіть область визначення функції (295–296).

295. а) $y = \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)^2}{(x^2-4)(x^2-2x-3)}}$; б) $y = \sqrt{\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x-5}} + \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}$.

296. а) $y = \sqrt{\frac{x^2(x-2)}{(x-3)^2(x^2+3x+2)}}$; б) $y = \sqrt{\frac{(x^2-4x+4)(4-x^2)}{x^2+2x-8}} + \sqrt{25-x^2}$.

Розв'яжіть систему нерівностей (297–298).

297. а) $\begin{cases} \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+3} \leq \frac{2x}{x^2-9}, \\ x^4-3x^2-4 \geq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+8}{x^2-16} + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x-4}, \\ \frac{13-6x}{x+2} \leq 2-x. \end{cases}$

298. а) $\begin{cases} \frac{x}{x^2+3x+2} \geq \frac{x}{x^2+7x+12}, \\ \frac{x^2-3x+1}{x^2-2} \geq 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x} > -2, \\ (2x^2-x+3)(x^2-9)(x^2-3x) \leq 0. \end{cases}$

Для кожного значення a розв'яжіть нерівність (299–300).

299. а) $(x-2)(x-a) \geq 0$; в) $(x+3)^2(x-a) > 0$; г) $(x+3)(x-a)^2 > 0$;

б) $(x-2)(x+a) \leq 0$; г) $(x-2)^2(x-a) \geq 0$; д) $(x-2)(x-a)^2 \geq 0$.

300. а) $(x+3)^2(x-a) < 0$; в) $(x+3)(x-a)^2 < 0$; г) $(x-2)^2(x-a) \leq 0$;

б) $(x-2)(x-a)^2 \leq 0$; г) $\frac{x-a}{x+3} \leq 0$; д) $\frac{x+3}{x-a} \geq 0$.

Розв'яжіть нерівність (301–305).

301. а) $(x^2+2x+1)(x^2+2x+4) > 10$; в) $(3x+1)^2 < 3x+1$;

б) $(2x^2-5x-4)(2x^2-5x) < 21$; г) $(3x+1)^2 \geq (6x+2)$.

302. а) $x(x+1)(x+2)(x+3) < 24$; б) $(x-2)(x+1)(x+2)(x+5) + 20 > 0$.

303. а) $x^4-7x^2+12 \geq 0$; в) $4x^4-5x^2+1 \leq 0$;

б) $x^4+5x^2-36 < 0$; г) $16x^4-15x^2-1 > 0$.

304. а) $(x+3)^4-(x+3)^2-2 > 0$; в) $(2x-1)^4-10(2x-1)^2+9 < 0$;

б) $\bar{x}^2+2\bar{x}+2(\bar{x}+1)-23 \leq 0$; г) $4x^2-12x+2(2x-3)-6 \geq 0$.

305. а) $\frac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x < 6$; в) $\frac{x(x-1)}{(x^2-x+1)^2} \leq \frac{2}{9}$;
 б) $\frac{x}{x^2-3x+2} \leq \frac{x}{x^2+3x+2}$; г) $\frac{x^2-13x+15}{x^2-14x+15} \leq \frac{3x}{x^2-6x+15}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

306. Знайдіть переріз та об'єднання множин A і B , якщо:
 а) $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; б) $A = (-7; 7)$, $B = (-\infty; -1] \cup [3; 5)$.
307. *Задача Леонардо Пізанського.* Знайдіть число, $\frac{19}{20}$ якого дорівнюють квадрату самого числа.
308. Розв'яжіть рівняння:
 а) $|2x| = 5$; б) $|2x+3| = 5$; в) $|2-x| = -1^2$; г) $|2x| = (-2)^2$.

§ 6 Задачі з параметрами

Tasks with Parameters

Фахівцям часто доводиться мати справу з рівняннями, які крім невідомих змінних і відомих чисел, містять і параметри. Параметр у рівнянні чи нерівності — це стала, значення якої при потребі можна змінювати. Рівняння може мати кілька змінних і кілька параметрів, які позначаються різними буквами, але в цьому параграфі розглянемо задачі, які містять одну змінну і один параметр.

Наприклад, у рівнянні $(a^2 - 4)x = a^2 + a - 2$ буквами позначено: x — змінну, a — параметр.

Розв'язати рівняння (нерівність чи систему) з параметром — означає для кожного значення параметра вказати, чи має рівняння (нерівність чи система) розв'язки, скільки їх і які вони.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $(a^2 - 4)x = a^2 + a - 2$.

Розв'язання. Задано лінійне рівняння відносно змінної x . Йому рівносильне рівняння $(a-2)(a+2)x = (a-1)(a+2)$.

Якщо $(a-2)(a+2) \neq 0$, тобто $a \neq 2$ і $a \neq -2$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{(a-1)(a+2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a-1}{a-2}$.

Якщо $a = 2$, то рівняння має вигляд $0x = 4$, а тому коренів не має.

Якщо $a = -2$, то рівняння має вигляд $0x = 0$, розв'язком якого є будь-яке число.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = \frac{a-1}{a-2}$; якщо $a = -2$, то коренем рівняння є кожне дійсне число; якщо $a = 2$, то рівняння коренів не має.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $ax^2 + 4x + a + 3 = 0$.

Розв'язання. Якщо $a = 0$, то рівняння має вигляд $4x + 3 = 0$ і має єдиний корінь $x = -\frac{3}{4} = -0,75$.

Якщо $a \neq 0$, то $ax^2 + 4x + a + 3 = 0$ — квадратне рівняння відносно змінної x . Знайдемо його дискримінант.

$$D = 16 - 4 \cdot a \cdot (a + 3) = -4a^2 - 12a + 16.$$

Дане рівняння має корені $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2a}$, якщо $D \geq 0$, тобто якщо $-4a^2 - 12a + 16 \geq 0$, $a^2 + 3a - 4 \leq 0$.

Множина розв'язків останньої нерівності, за умови $a \neq 0$, $[-4; 0) \cup (0; 1]$.

Розглянемо два випадки. Якщо $D = 0$, то $x = \frac{-2}{a}$. У цьому випадку при $a = -4$ $x = 0,5$, а при $a = 1$ $x = -2$.

Якщо $D > 0$, тобто $a \in (-4; 0) \cup (0; 1)$, рівняння має два корені $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 3a - a^2}}{a}$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$, то дійсних коренів немає; якщо $a = -4$, то $x = 0,5$; якщо $a = 0$, то $x = -0,75$; якщо $a = 1$, то $x = -2$; якщо $a \in (-4; 0) \cup (0; 1)$, то $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 3a - a^2}}{a}$.

Розглядають і текстові задачі з параметром.

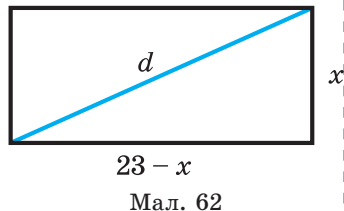
Приклад 3. Периметр прямокутника дорівнює 46, а діагональ — d . Знайдіть довжини сторін прямокутника. Яким може бути значення d ?

Розв'язання. Нехай одна сторона прямокутника має довжину x . Тоді друга дорівнює $23 - x$ (мал. 62). За теоремою Піфагора, $x^2 + (23 - x)^2 = d^2$, звідси $2x^2 - 46x + 23^2 - d^2 = 0$. Отримали рівняння з параметром d . Розв'яжемо його відносно x :

$$D = 46^2 - 4 \cdot 2 \cdot (23^2 - d^2) = 4(2d^2 - 23^2).$$

$$x_1 = 0,5(23 - \sqrt{2d^2 - 23^2}), \quad x_2 = 0,5(23 + \sqrt{2d^2 - 23^2}) = 23 - x_1.$$

Щоб розв'язок був числом дійсним і додатним, необхідно, щоб виконувалася умова $2d^2 - 23^2 \geq 0$, тобто $\sqrt{2d} \geq 23$, $d \geq 11,5\sqrt{2}$. Оскільки сторона



Мал. 62

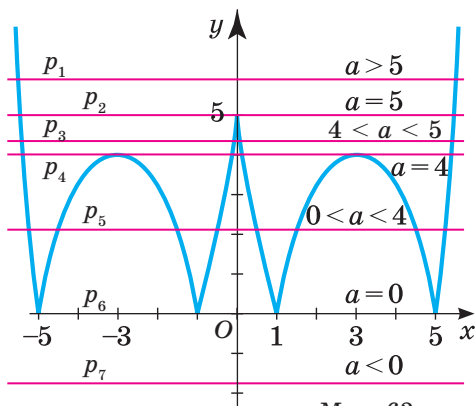
трикутника менша від суми двох інших його сторін, то $d < 23$. Отже, $11,5\sqrt{5} \leq d < 23$.

Відповідь. Якщо $11,5\sqrt{2} \leq d < 23$, то сторони прямокутника дорівнюють $0,5(23 \pm \sqrt{2d^2 - 23^2})$.

Якщо вимагається визначити кількість коренів рівняння при певних значеннях параметра, то доцільно використовувати графічний метод.

Приклад 4. При якому значенні параметра a рівняння $|x^2 - 6|x| + 5| = a$ має найбільшу кількість коренів? Чи може кількість коренів бути непарною?

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = |x^2 - 6|x| + 5|$ і $y = a$ (мал. 63).



Мал. 63

Бачимо, що рівняння може мати:

- 1) 2 корені (пряма p_1), якщо $a > 5$;
- 2) 3 корені (пряма p_2), якщо $a = 5$;
- 3) 4 корені (пряма p_3), якщо $4 < a < 5$;
- 4) 6 коренів (пряма p_4), якщо $a = 4$;
- 5) 8 коренів (пряма p_5), якщо $0 < a < 4$;
- 6) 4 корені (пряма p_6), якщо $a = 0$;
- 7) 0 коренів (пряма p_7), якщо $a < 0$.

Відповідь. При $0 < a < 4$ рівняння має найбільшу кількість коренів: 8. При $a = 5$ рівняння має непарну кількість коренів: 3.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $3(2a - x) < a(x + 1)$.

Розв'язання. Розкриємо дужки і перенесемо всі члени нерівності в одну частину: $6a - 3x - ax - a < 0$, або $(3 + a)x > 5a$.

Якщо $3 + a = 0$, то нерівність має вигляд $0x > -15$. Вона правильна при будь-якому значенні x .

Якщо $3 + a > 0$, тобто $a > -3$, то $x > \frac{5a}{3+a}$.

Якщо $3 + a < 0$, тобто $a < -3$, то $x < \frac{5a}{3+a}$.

Відповідь. Якщо $a = -3$, $x \in \mathbb{R}$; якщо $a > -3$, то $x > \frac{5a}{3+a}$; якщо $a < -3$, то $x < \frac{5a}{3+a}$.

Приклад 6. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \leq 0, \\ x < a. \end{cases}$

Розв'язання. Множина розв'язків першої нерівності $[-2; 4]$ (розв'яжіть самостійно). Щоб розв'язати задану систему нерівностей, потрібно розгля-

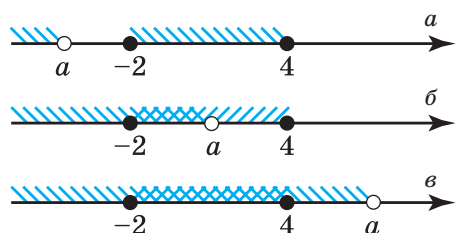
нути різні випадки розміщення точки $x = a$ на числовій прямій відносно відрізка $[-2; 4]$.

Якщо $a \leq -2$ (мал. 64, а), то система розв'язків не має.

Якщо $a \in (-2; 4]$, то $x \in [-2; a]$ (мал. 64, б).

Якщо $a > 4$, то $x \in [-2; 4]$ (мал. 64, в).

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -2]$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in (-2; 4]$, то $x \in [-2; a]$; якщо $a \in (4; +\infty)$, то $x \in [-2; 4]$.

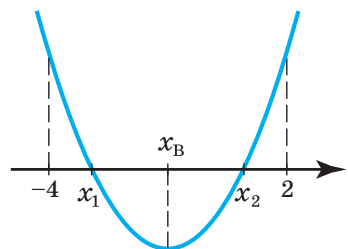


Мал. 64

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Задача. При яких значеннях параметра c корені рівняння $x^2 + (c - 1)x + c + 2 = 0$ належать проміжку $(-4; 2)$?

Розв'язання. Щоб дане рівняння мало дійсні корені, необхідно, щоб його дискримінант був невід'ємним, тобто $(c - 1)^2 - 4(c + 2) \geq 0$. Щоб нулі функції $f(x) = x^2 + (c - 1)x + c + 2$ належали проміжку $(-4; 2)$, треба, щоб значення $f(-4)$ і $f(2)$ були додатними, а абсциса вершини параболи лежала між кінцями даного проміжку (мал. 65). Отже, шукані значення параметра c мають задовольняти систему нерівностей:



Мал. 65

$$\begin{cases} (c-1)^2 - 4(c+2) \geq 0, \\ f(-4) > 0, \\ f(2) > 0, \\ -4 < 0,5(1-c) < 2; \end{cases} \begin{cases} c^2 - 6c - 7 \geq 0, \\ 22 - 3c > 0, \\ 3c + 4 > 0, \\ -3 < c < 9; \end{cases} \begin{cases} (c+1)(c-7) \geq 0, \\ c < 7\frac{1}{3}, \\ c > -1\frac{1}{3}, \\ -3 < c < 9. \end{cases}$$

Відповідь. $c \in \left(-1\frac{1}{3}; -1\right] \cup \left[7; 7\frac{1}{3}\right)$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Яке рівняння називають рівнянням з параметром?
2. Наведіть приклад рівняння з параметром.
3. Наведіть приклад нерівності з параметром.
4. Що означає розв'язати рівняння (нерівність) з параметром?
5. Як розв'язують задачі з параметром, у яких вимагається визначити кількість чи наявність коренів?